

## Számítástudomány alapjai

1. gyakorlat – *Leszámlálási feladatok* – 2008. 09. 09.

<http://www.cs.bme.hu/~peresz/sza/>

- Hányféleképpen festhetjük egy  $n$ -emeletes ház szintjeit fehérre, drappra és barnára, ha szomszédos szintek nem lehetnek egyszínűek?
- Hányféleképpen lehet elhelyezni egy  $(8 \times 8)$ -as sakktablán 8 bástyát úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?
- Hány olyan 10 jegyű szám van, amelyben pontosan egy 5-ös számjegy szerepel?
- Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ.
  - Hányféleképpen tehetik ezt?
  - És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?
- $k$  különböző vázába hányféleképpen oszthatunk el
  - $n$  különböző virágot?
  - $n$  ugyanolyan virágot?  
(Egyes vázák üresek is maradhatnak.)
- Az  $n$  elemű halmaz páros, vagy páratlan részhalmazaiából van több?
- 5 házaspár ül egy padon. Hányféleképpen helyezkedhetnek el, ha a házastársak egymás mellett akarnak ülni?
- 10 egyforma csokit, 6 egyforma rágógumit és 9 egyforma jégkrémet osztunk ki 25 gyerek között úgy, hogy mindenki pontosan egyvalamit kapjon. Hányféleképpen tehetjük ezt?
- Egy  $n$  tagú társaságban mindenki mindenkit kézfogással üdvözölt. Hány kézszorítás volt összesen?
- Legyen  $p$  prím és  $1 \leq k < p$ . Mutassuk meg, hogy  $\binom{p}{k}$  osztható  $p$ -vel!
- Mutassuk meg, hogy ez nem feltétlenül teljesül, ha  $p$  összetett szám!
- Sőt, mutassuk meg, hogy minden  $m$  összetett számhoz van olyan  $1 \leq k < m$ , hogy  $\binom{m}{k}$  nem osztható  $m$ -mel!
- Egy  $n$ -elemű halmaznak legfeljebb hány részhalmaza adható meg úgy, hogy bármely kettő messe egymást?
- Bizonyítsuk be:
  - $n \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n}{k+1} + k \binom{n}{k}$
  - $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$
  - $\sum_k \binom{r}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}$
- Hat pár fekete és ugyanannyi kék zoknid – amelyeket sajnos nem raktál össze párosával – összekeveredett a fiókban. Teljes sötétségben hány darabot kell elővenned a 24-ből, hogy biztosan legyen köztük egy összeillő pár? És ha egy kék párra van szükséged?
- Igaz-e, hogy ha egy mátrix minden sorában az elemek átlaga legalább 100, akkor van olyan oszlop is, ahol az átlag szintén legalább 100?
- BÓNUSZ** Valaki azzal dicsekszik, hogy bármilyen fáról meg tudja mondani, hogy hány levél van rajta. Sajnos a fák nagyon nagyok is lehetnek, így mi nem tudjuk megszámlálni, hogy hány levél van rajtuk. (Egyszerűen azért, mert túl sokáig tartana.) Mégis, hogyan győződhetnénk meg arról, hogy az illető nem hazudik?