7. gyakorlat

2008. március 26.

http://www.cs.bme.hu/~peresz/algel/

1. **2007. április 27., 1. feladat**
   A valós számokból álló $a_1, \ldots, a_n$ sorozat olyan, hogy az $a_1^2, \ldots, a_n^2$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjon $O(n)$ összehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \ldots, a_n$ sorozatot.

2. **2007. április 27., 4. feladat**
   Ha adott n szám, akkor hívjuk középső elemnek a rendezés szerinti $\lceil n/2 \rceil$-ediket. Kezdetben adottak az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egész számok, amikről tudjuk, hogy az a_1 a középső elem, egyébként a számok rendezetlenek. Ezekből építsen fel egy adatszerkezetet, amiben két művelet van:
   BESZÚR: egy új elemet illeszt az adatszerkezetbe,
   KÖZÉPTÖR: az aktuális középső elemet törli.
   Mindkét művelet megvalósítása $O(\log k)$ összehasonlítást használjon, amikor k tárolt elem van. Az adatszerkezet kezdeti felépítése legyen $O(n)$ összehasonlítás.

3. **2007. április 27., 7. feladat**
   Az $n \times n$ méretű tábla minden mezőjére egy pozitív egész szám van írva, az i-edik sorának j-edik elemére $A[i, j]$, ahol $0 \leq i, j \leq n$. Feladat, hogy az első oszlopból eljussunk az utolsó oszlopba úgy, hogy egy lépésben mindig a következő oszlopba lépünk, és azon belül, ha az i-edik sorban voltunk, akkor a következő lépésben vagy az $(i-1) \mod n$ vagy az i vagy az $(i+1) \mod n$ számú sorba kerülhetünk. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az első oszlop melyik eleméről induljunk, ha azt akarjuk, hogy a bejárt mezőkön lévő számok összege minimális legyen! (Az utolsó oszlop bármelyik mezője lehet az utolsó olyan mező, amire rálépünk.)

4. **2007. május 22., 4. feladat**
   Legyen adott egy csupa különböző egész számot tároló n elemű A tömb, és egy $1 \leq k \leq n$ szám. A k darab legkisebb abszolút értékű tömbbeli elemet akarjuk meghatározni. Ha több megoldás is van, elég csak egy ilyen k-ast megadni. Adjon algoritmust, ami meghatároz k darab ilyen értéket, és a $k \leq \lfloor \log n \rfloor$ esetben $O(n)$!

5. **2006. november 20., 3. feladat**
   Az $A[1..n]$ tömbben különböző egész számokat tárolunk növekvő sorrendben. A $B[1..n]$ tömb elemei nem feltétlenül egész számok, de tudjuk róluk, hogy nem nagyon térnek el az A-beli értékektől, azaz minden $1 \leq i \leq n$ esetén $|B[i] - A[i]| < 2$. Adjon $O(n)$ lépéses algoritmust a B tömb rendezésére!

6. **2006. november 20., 4. feladat**
   Egész számokat akarunk nyilvántartani úgy, hogy legyen lehetőség egyszerre az

összes elem (-1)-szeresét venni, továbbá újabb elemek hozzávételére, meglévő elemek törlésére, adott elem keresésére is. Javasoljon olyan módszert, hogy n tárolt elem esetén mind a négy művelet $O(\log n)$ lépésben történjen!

7. **2007. június 5., 4. feladat**
   Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k-2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?

8. **2007. június 19., 5. feladat**
   Adott a síkon n pont, melyek koordinátái $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$. Olyan $P = (x, y)$ pontot keresünk a síkon, amire az alábbi összeg minimális.

   $$\sum_{i=1}^{n} (|a_i - x| + |b_i - y|)$$

   Adjon algoritmust, ami $O(n \log n)$ lépésben meghatároz egy ilyen P pontot!

9. **2006. április 7., 5. feladat**
   Vidéken autózunk, ahol benzinkút csak bizonyos falvakban van. Az A falubeli benzinkúttól indulunk és a B faluba akarunk elérni (ahol szintén van benzinkút). A falvak közötti utakat egy n csúcsú e élű, összefüggő, irányítatlan gráf írja le, melynek csúcsai a falvak, az élek pedig a falvak közötti utakat jelentik, egy él súlya a két falut összekötő útszakasz hossza. A gráf az éllistájával adott, és ezen kívül adott még az a k falu, amelyben van benzinkút. Adjon $O(ke \log n)$ lépésszámú algoritmust, amely meghatározza az A-ból B-be vivő legrövidebb olyan útvonalat, melynek során soha nem kell 600 kilométernél többet autóznunk két benzinkút között!

10. **2006. május 29., 4. feladat**
    Legyen k pozitív egész szám, $A[1:n]$ pedig egy olyan tömb, melyben 1 és M közötti különböző egész számokat tárolunk, nem feltétlenül rendezetten. Egy (j, i) számpárra azt mondjuk, hogy k-as hézag az A tömbben, ha $A[i] - A[j] \geq k$ és $A[j]$ és $A[i]$ közé nem esik másik A-beli elem (azaz nincs olyan $1 \leq \ell \leq n$ index, melyre $A[j] < A[\ell] < A[i]$ állna). Adjon $O(n + \lfloor M/k \rfloor)$ lépést használó algoritmust, ami adott k és A esetén talál egy k-as hézagot A-ban vagy ha nincs ilyen, akkor azt jelzi. (Például, ha a $[14, 15, 23, 20]$ tömbben keresünk 5-ös hézagot, akkor a válasz $(2, 4)$.)