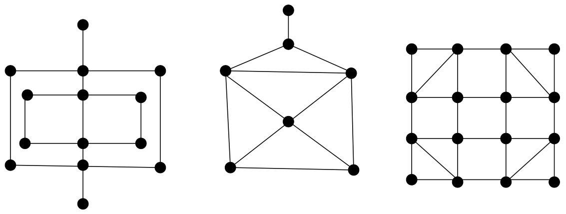
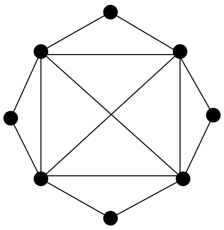
Bevezetés a számításelméletbe II.
2005. február 17.
1. gyakorlat: Euler- és Hamilton bejárások

1. Elkészíthetők-e a ceruza felemelése nélkül az alábbi ábrák úgy, hogy minden vonalon pontosan egyszer haladunk végig?



2. **ZH!** Hányszor kell minimálisan felemelni a ceruzát az alábbi gráf lerajzolása során?

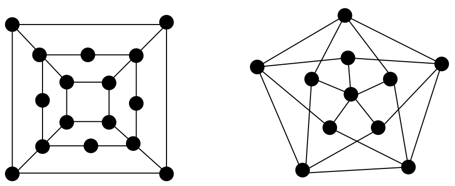


3. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának a foka 4, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék!

4. **ZH!** Mutassuk meg, hogy ha G-ben van Euler-kör, akkor minden vágásában páros sok él van! Igaz-e ez visszafelé, ha tudjuk, hogy a gráf összefüggő?

5. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$.
   (a) Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve utat?
   (b) Hamilton-kört, illetve utat?

6. **ZH!** Van-e a következő gráfokban Hamilton-kör, illetve út?



7. Be lehet-e járni lóval egy 4×4-es sakktáblát?

8. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?

9. Legfeljebb hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek nincs Hamilton-köre?

10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű gráfnak n csúcsa és $\binom{n-1}{2} + 1$ éle van, akkor még nem biztos, hogy tartalmaz Hamilton-kört, de ha ennél 1 éllel több, akkor már biztosan lesz benne.

11. **ZH!** Mutassuk meg, hogy $n \geq 5$-re igaz az alábbi két állítás!
   (a) Létezik olyan n csúcsú G gráf, hogy G is és $\overline{G}$ is tartalmaz Hamilton-kört.
   (b) Létezik olyan n csúcsú gráf, hogy sem G, sem $\overline{G}$ nem tartalmaz Hamilton-kört.

12. Lássuk be, hogy egy $2n - 1$ pontú gráfban, ahol minden csúcs foka legalább $n - 1$ létezik Hamilton-út!

13. Egy hotelba egy 100 fős társaság érkezik, akik közül kezdetben bármely két ember jóban van egymással. Esténként egyetlen nagy kerek asztal körül ül le mindenki. Sajnos egy vacsora alkalmával az egymás mellé került emberek örökre összevesznek egymással. A társaság minden vacsora előtt úgy ül le, hogy mindenki a szomszédjaival jóban legyen. Ha ez lehetetlen, akkor az összes résztvevő még aznap este haza megy. Bizonyítsuk be, hogy legalább 25 éjszakát a hotelban tölt a társaság!