Bevezetés a számításelméletbe II.

2005. május 5.

12. gyakorlat: Szimmetrikus csoport, normálosztó

1. Írjuk fel a következő permutációkat diszjunkt ciklusok szorzataként!

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, b = (456)(567)(671)(123)(234)(345)$$

2. Írjuk át a követkető két permutációt ciklikus alakra, majd számítsuk ki a szorzatukat! Mi a kapott permutáció fixpontja?

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Határozzuk meg a következő két elem rendjét az S_8 szimmetrikus csoportban!

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Írjuk fel a szabályos háromszög és a szabályos nyolcszög szimmetriacsoportját! (D_3, D_8 diédercsoport)
   Milyen egybevágósági transzformációt jelent az (123) illetve az (18)(27)(36)(45) permutáció? (Mindkét sokszögben a csúcsok 1-től n-ig számozottak.)

5. A D_n diédercsoport elemei közül legyen t az egyik tükrözés és f az egyik forgatás. Igaz-e, hogy $t \cdot f = f^{-1} \cdot t = t^*$?

6. Vegyük a $\{0, 1, 2, 3, \ldots, 11\}$ számokat a $\pmod{12}$ összeadásra nézve.
   Normálosztója-e ennek a csoportnak a 4-el osztható számok halmaza?
   Ha igen, akkor mik a velük képzett faktorcsoportok?

7. Mik lehetnek a C_{12} ciklikus csoport további normálosztói? Mik a velük képzett faktorcsoportok?

8. Tekintsük az egész számokat az összeadás művelettel, és rendezzük a számokat a paritásuk szerint! A páratlan vagy a páros számok osztálya lehet-e normálosztó a csoportban? Mi a hozzá tartozó faktorcsoport?

9. Tekintsük a nemnulla komplex számokat a szorzás művelettel, és rendezzük a számokat mellékosztályokba a hosszúságuk szerint! Melyik osztály lehet közülük a normálosztó? Mi a faktorcsoport?