Bevezetés a számításelméletbe II.
2005. ÁPRILIS 28.
11. gyakorlat: Algebrai alapfogalmak 2.

1. Mi az egyes elemek rendje C_{12}-ben (a 12 rendű ciklikus csoportban)?
2. **ZH!** Legyen a G csoport elemeinek halmaza $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a művelet a mod 7 szorzás. Igazoljuk, hogy a G csoport ciklikus!
3. $|G| = 81$ és $\exists a \in G: \ a^{27} \neq 1 \Longrightarrow$ a csoport kommutatív.
4. Jelölje a és b egy csoport két tetszőleges elemét. Bizonyítsuk be, hogy b rendje megegyezik $a^{-1}ba$ rendjével!
5. Mely csoportokra igaz, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?
6. Az n-ed rendű ciklikus csoport összes elemét négyzetre emeljük, majd az így kapott elemeket összeszorozzuk. Mivel egyenlő ez a szorzat?
7. Tekintsünk egy páratlan rendű Abel-csoportot (G), ahol a művelet az összeadás. Bizonyítsuk be, hogy $\sum\limits_{a \in G} a = 0$.
8. **ZH!** Legyen $n \geq 4$. Az n hosszú 0-1 sorozatok H_1 halmazán jelölje $\oplus$ a bitenkénti modulo 2 összeadást. Álljon H_2 azokból a sorozatokból, melyekben az egyesek száma kettővel osztható. H_3 pedig azokból, melyekben az egyesek száma osztható hárommal. Az előbb definiált művelettel csoportot alkot-e H_2? Csoport-e H_3?
9. **ZH!** Bizonyítsuk be, hogy egy csoport nem állhat elő két valódi részcsoportjának uniójaként.
10. Bizonyítsuk be, hogy ha egy csoportban minden egységelemtől különböző elem rendje ugyanaz, akkor ez a rend prímszám!
11. **ZH!** Bizonyítsuk be, hogy ha a G csoport rendje 55, akkor minden $a \in G$ elemére teljesül, hogy az a és az a^8 elemek rendje azonos.
12. Csoportot illetve félcsoportot alkot-e az alábbi H halmaz a $*$ művelettel?
    (a) H az egész számok halmaza és az a, $b \in H$ számokra $a * b = a + b + 1$, ahol a szokásos összeadás szerepel;
    (b) Legyen m egy rögzített szám és $H = \{1, 2, \ldots, m - 1\}$. Továbbá $a * b = ab \pmod{m}$;
    (c) H az egész számok halmaza és $a, b \in H$ számokra $a * b = a^b$;
    (d) **ZH!** H azon f függvények halmaza, melyek $f(x) = cx + d$ alakúak, ahol $c \neq 0$. A $*$ művelet pedig a függvények egymás után való alkalmazása (kompozíció, jelölése analízisben $f \circ g$);
    (e) **ZH!** H a valós számok halmaza és $a * b = a + b + ab$;
    (f) H a 2002 pozitív osztóinak halmaza és az $a, b \in H$ számokra $a * b = (a, b)$, azaz a és b legnagyobb közös osztója.