Bevezetés a számításelméletbe I.

2004. NOVEMBER 8.

9. gyakorlat: Lineáris leképezések

1. Mi a magtere, képtere a szokásos háromdimenziós tér alábbi lineáris transzformációinak? Mik a leképezésekhez tartozó mátrixok?

   (a) Az identitás transzformáció

   (b) A zérus transzformáció

   (c) Az x-tengelyre való vetítés

   (d) Az $y - z$ síkra való vetítés

2. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok a sík vektorterén?

   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}$

3. Lássuk be a következőket:

   (a) $\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} cosk\phi & -sink\phi \\ sink\phi & cosk\phi \end{pmatrix}$

   (b) $\{x$-tengelyre tükrüzés$\} \times \{y$-tengelyre tükrözés$\} = \{$középpontos tükrözés$\}$

4. Mi a magtere és képtere az alábbi leképezésnek: $f \rightarrow f(1)$, ahol a valós függvények teréből a valósok terére képezünk.

5. A legfeljebb 5-ödfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak R felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy Φ lineáris transzformációja. Írjuk fel Φ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban.

6. Igazoljuk, hogy bármely A lineáris leképezés esetén tetszőleges $\underline{u}$, $\underline{v}$ vektorokra $A(\underline{u}) = A(\underline{v})$ akkor és csak akkor igaz, ha $\underline{u} - \underline{v} \in KerA$.

7. Tudjuk, hogy egy A lineáris transzformáció magtere csak a nullvektorokból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat:

   (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor.

   (b) Bármely két vektor képe különböző.

   (c) A képtér dimenziója megegyezik a kiindulási vektortér dimenziójával.

8. Legyen A mátrix által a V vektortéren megvalósított lineáris transzformáció olyan, hogy $KerA$ tartalmazza ImA-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = 0$.

9. **ZH!** Legyen V egy 37 dimenziós lineáris tér és $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ lineáris leképezés. Jelölje $\mathcal{A}^2$ azt a lineáris leképezést, amit $\forall \underline{v} : \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\underline{v}))$ definiál. Tegyük fel, hogy $\dim Im\mathcal{A}^2 = 7$. Mennyi ezen feltétel mellett $\dim Ker\mathcal{A}$ lehetséges legkisebb értéke?