Bevezetés a számításelméletbe I.

Megoldások

9. gyakorlat: Lineáris leképezések

1. Magtér: $Ker(A) := \{\underline{u} \in V_1 | \mathcal{A}\underline{u} = \underline{0}\}$
   Képtér: $Im(A) := \{\underline{v} \in V_2 | \exists \underline{u} : \mathcal{A}\underline{u} = \underline{v}\}$
   és az $\mathcal{A} : \underline{u} \to \underline{v}$ leképezéshez tartozó mátrix legyen A.

	a	b	c	d
Mátrixok:	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
Ker(A)=	$\{(0,0,0)\}$	$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$	$\{(0,b,c) \in \mathbb{R}^2\}$	$\{(a,0,0) \in \mathbb{R}\}$
Im(A)=	$\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$	$\{(0,0,0)\}$	$\{(a,0,0) \in \mathbb{R}\}$	$\{(0,b,c) \in \mathbb{R}^2\}$

2. A leképezések, és a hozzájuk tartozó magterek, képterek a következők:

	a	b	c	d
Mátrixok:	$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$
Trafók:	helybenhagyás	x-tengelyre vetítés	zérus-transzformáció	nyújtás
Ker(A)=	$\{(0,0)\}$	$\{(0,b) \in \mathbb{R}\}$	$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$	$\{(0,0)\}$
Im(A)=	$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$	$\{(a,0) \in \mathbb{R}\}$	$\{(0,0)\}$	$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

	e	f	g	h
Mátrixok:	$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}cos\phi&-sin\phi\\sin\phi&cos\phi\end{pmatrix}$
Trafók:	tükrözés „x”-re	tükrözés „$x = y$”-re	90^o-os forgatás	forgatás ϕ-vel
Ker(A)=	$\{(0,0)\}$	$\{(0,0)\}$	$\{(0,0)\}$	$\{(0,0)\}$
Im(A)=	$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$	$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$	$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$	$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

3. Ha A az $\mathcal{A}$ leképezéshez tartozó mátrix és B a $\mathcal{B}$ leképezéshez tartozó, akkor $A \times B$ lesz a leképezések egymásutánjához, vagyis az $\mathcal{A}(\mathcal{B})$ szorzat-leképezéshez tartozó mátrix. Hasonlóképpen, ha egy $\mathcal{A}$ leképezést k-szor hajtunk végre, akkor az ennek megfelelő mátrix A^k lesz.

   (a) Az egyenlőséget beláthatjuk a mátrix hatványozásával, trigonometrikus azonosságok segítségével is, de a lineáris leképesézek nyelvén triviális az azonosság, mert k-szor ϕ fokot forgatni, ugyanaz mint egyszer $k \cdot \phi$ fokot forgatni.

   (b) Az x és y-tengelyre való tükrözéshez tartozó mátrixok összeszorzásával kapjuk, hogy:

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

   amely megfelel a középpontos tükrözés mátrixának.

4. Magtér:$Ker(A) = \{f(x) | f(1) = 0\}$
   Képtér: $Im(A) = \{c \in \mathbb{R}\}$, mert pl: konstans fv-re: $c(1) = c$.

5. Tényleg lineáris transzformáció, mert

$$(\lambda f(x))' = \lambda f(x)' \text{és} (f(x) + g(x))' = f(x)' + g(x)'$$

A leképezés mátrixa a természetes bázisban: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Ha tehát két elem képe megegyezik, akkor:

$$A(\underline{u}) = A(\underline{v}) \iff \underline{0}_2 = A(\underline{u}) - A(\underline{v}) = A(\underline{u} - \underline{v}) \iff \underline{u} - \underline{v} \in Ker(A)$$

7. A lineáris transzformáció magtere csak a nullvektorokból áll.
   (a) A Magtér deiníciájából közvetlenül következik.
   (b) Az előző feladat következménye.
   (c) A dimenzó-tétel szerint: $dim(Ker(A)) + dim(Im(A)) = dim(V_1)$
   Tudjuk, hogy $dim(Ker(A)) = 0$, mert $Ker(A) = \{\underline{0}_1\}$, és ebből következik az állítás.

8. Megmutatjuk, hogy ha az $\mathcal{A} : V \to V$ leképezést egymás után kétszer végrehajtjuk, akkor bármely elem a $\underline{0}$-ba megy:

$$\forall \underline{u} \in V\text{-re} : A(\underline{u}) \in Im(A) \subseteq Ker(A) \Longrightarrow A(\underline{u}) \in Ker(A) \iff A(A(\underline{u})) = \underline{0}$$

9. (hivatalos megoldás)
A Dimenziótétel szerint dim $Im\mathcal{A}^2 = 37-$ dim $Ker\mathcal{A}^2$. Innen dim $Ker\mathcal{A}^2 = 30$ adódik. Megmutatjuk, hogy dim $\mathcal{A}^2 \leq 2$ dim $Ker\mathcal{A}$.
Tudjuk, hogy $Ker\mathcal{A}$ és $Ker\mathcal{A}^2$ is altere V-nek. Világos, hogy $Ker\mathcal{A} \subseteq Ker\mathcal{A}^2$, vagyis előbbi az utóbbinak is altere. Ezért felírható V-nek egy olyan $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_r\}$ bázisa, hogy $\{a_1, \ldots, a_k\}$ bázisa $Ker\mathcal{A}$-nak, és $\{a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m\}$ bázisa $Ker\mathcal{A}^2$-nek.
A Dimenziótétel bizonyításából tudjuk, hogy ilyenkor $\mathcal{A}(b_1), \ldots, \mathcal{A}(b_m)$ lineárisan függetlenek. Közülük tehát legfeljebb dim $Ker\mathcal{A}^2 = k$ eshet $Ker\mathcal{A}$-ba. De tudjuk, hogy $\mathcal{A}(b_1), \ldots, \mathcal{A}(b_m)$ mindegyike $Ker\mathcal{A}$-ba esik, így $m \leq k$, amiből dim $Ker\mathcal{A}^2 = m + k \leq 2k = 2$ dim $Ker\mathcal{A}$, amint állítottuk.
Az utóbbi egyenlőséget a dim $Ker\mathcal{A}^2 = 30$ egyenlőséggel összevetve dim $Ker\mathcal{A} \geq 15$ adódik.