Bevezetés a számításelméletbe I.
2004. szeptember 28.
3. gyakorlat: Vektorterek II.

1. **ZH!** Vektorteret adnak-e az alábbi valóselemű mátrixok szokásos (tehát elemenkénti) összeadásra és valós számmal való szorzásra nézve?
   (a) $\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R, a + b = 5\}$
   (b) $\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b, c \in R, a + b = 0\}$

2. Az alábbi halmazok vektorteret adnak a valós test felett. Keressünk bennük minél több vektorból álló lineárisan független rendszert és minél kevesebb vektorból álló generátorrendszert!
   (a) Az összes térvektor.
   (b) Az összes legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinom.
   (c) Az összes $n \times n$-es valós elemű mátrix.

3. **ZH!** Az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3, b_4 vektorok generálják ugyanazt a V lineáris teret.
   zonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $a_1 + a_2, a_3 + b_1, a_3 + b_2, b_3 + b_4$.

4. **ZH!** Egy vektortérben az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ vektorok is, a $b_1, b_2, \ldots, b_l$ vektorok is külön-külön lineárisan független rendszert alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy ha a két vektorhalmaz által generált alterek metszete csak a nullvektor, akkor ez a $k + l$ darab vektor együtt is lineárisan független!

5. (a) Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$?
   (b) Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?