Bevezetés a számításelméletbe I.

2003. DECEMBER 7.

13. gyakorlat: Gráfelmélet bevezető, síkbarajzolhatóság

1. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámai:

   (a) 1,2,2,3,3,3

   (b) 1,1,2,2,3,4,4

2. Hány olyan lényegesen különböző gráf van, melyre $n = 4$, $e = 5$?

3. Hány egymással nem izomorf 60 csúcsú, 1768 élű gráf létezik?

4. Lássuk be, hogy egy gráf vagy a komplementere biztosan összefüggő!

5. Egy n-pontú fában két 5-öd fokú pont van. Legalább hány első fokú pont van benne?

6. **ZH!** Egy n csúcsú fa fokszámai $n-1$ félék. Mekkora lehet n értéke?

7. **ZH!** Ketten a következő játékot játszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki olyan élet húz be, amitől a gráfban kör keletkezik. A kezdő, vagy a másodiknak lépő fog nyerni, ha feltesszük, hogy mindketten a lehető legjobban játszanak?

8. **ZH!** A $V = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n-2$ éle van és két egyforma méretű összefüggő komponensből áll?

9. Egy gömbre rajzolt 6 tartományból álló 3-reguláris gráfban mennyi az élek száma?

10. Bizonyítsuk be, hogy egy egyszerű síkbarajzolható gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6.

11. **ZH!** Egy 20 csúcsú konvex poliéder lapjainak száma 12. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?

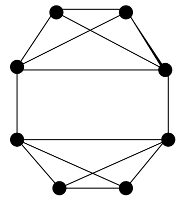
12. Adjunk felső becslést egy síkbarajzolható gráf éleinek számára, ha minden körének hossza legalább k.

13. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!

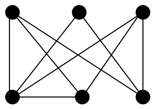
14. **ZH!** Egy síkságon öt ház és öt kút áll. Minden háztól minden kúthoz külön ösvényt kell építenünk. Az építendő ösvények némelyike keresztezheti egymást, de egy-egy kereszteződésben legfeljebb két ösvény találkozhat. Mutassuk meg, hogy ekkor kilencnél kevesebb kereszteződéssel biztosan nem megoldható a feladat.

15. **ZH!** Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok? (Ha igen, akkor rajzoljuk le őket, ha nem akkor mutassuk meg, hogy miért nem!)

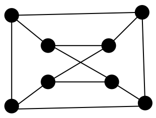
a)



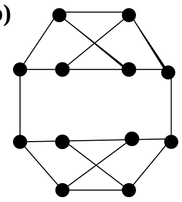
c)



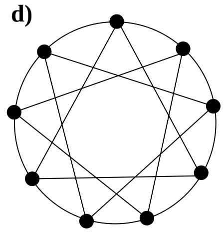
e)



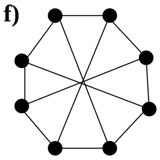
b)



d)



f)



16. **ZH!** Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a komplementere $\bar{G}$ nem síkbarajzolható?

17. Síkbarajzolható-e az a gráf, melynek pontjai az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz kételemű részhalmazai, és ezek között pontosan akkor megy él, ha a halmazok nem diszjunktak?

18. Egy nemzetközi konferencián egy asztalnál öt különböző ország egy-egy résztvevője ül. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos!