Bevezetés a számításelméletbe I.
2004. NOVEMBER 30.
12. gyakorlat: Komplex számok

1. Legyen $z = 1 + \sqrt{3}i$ és $w = 2 - 2i$ két komplex szám.
   (a) Ábrázoljuk a számokat a komplex síkon, és írjuk fel a trigonometrikus alakjukat!
   (b) Mennyi a két szám összege, szorzata illetve hányadosa?
   (c) Határozzuk meg z konjugáltjának és gyökeinek kanonikus alakját!

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   (a) $z^2 + 3 = 0$
   (b) $z^2 - 1 - \sqrt{3}i = 0$
   (c) $z^2 - 4z + 5 = 0$
   (d) $z + \bar{z} = 2|z|$
   (e) $\bar{z} = z^{2003}$

3. Milyen számokat kapunk, ha az $a + bi$ komplex számnak megfelelő pontot tükrözzük a valós tengelyre, a képzetes tengelyre, illetve az $x = y$ egyenesre?

4. Jellemezzük azon komplex számokat, melyeknek összege valós, szorzata valós, illetve negyzetösszege valós?

5. **ZH!** Milyen n-ekre lesz valós a $(\sqrt{3} - i)^n$ komplex szám?

6. **ZH!** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében!
$$z(1 + i) - \bar{z}(1 - i) = 2i$$

7. **ZH!** Számítsuk ki
$$\left(\frac{3 - i}{2 - 4i}\right)^{2003}$$
értékét!

8. **ZH!** Adjuk meg az alábbi kifejezés által definiált komplex szám kanonikus alakját:
$$\frac{(-1 + i)^{1998}}{(1 + i)^{2000}}$$

9. Mutassuk meg, hogy egységgyökök szorzata is egységgyök! Mi a feltétele annak, hogy az egységgyökök összege is egységgyök legyen?

10. Mennyi az n-edik egységgyökök szorzata, illetve összege?

11. **ZH!** A kétezredik egységgyökök közül hány olyan van, melynek az ezredik hatványa is eggyel egyenlő?