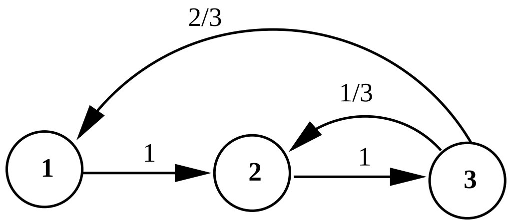
10. Plusz feladat

Van egy sztochasztikus rendszerünk, amelynek 3 lehetséges állapotja van. Az egyes állapotok közti átmenet valószínűségét az alábbi ábra írja le:



(Pl:1-ből csak 2-be mehetünk, 3-ból 2-be $\frac{1}{3}$ valószínűséggel megyünk...) Kíváncsiak vagyunk arra, hogy az így működő rendszerben melyik állapotban milyen valószínűséggel vagyunk. (Ez azt is jelenti, hogy átlagosan ennyit leszünk az egyes állapotokban, szaknyelven ezt az eloszlászt hívják *stacionárius eloszlásnak*). Rövid matematikai idoklással belátható, hogy a keresett $(p_1, p_2, p_3)^T$ eloszlás-vektort, (ahol természetesen $\sum p_i = 1$) megkaphatjuk a P átmenet-mátrix $\lambda = 1$ értékhez tartozó sajátvektoraként, ahol a $P_{i,j}$ érték azt a valószínűséget jelenti, amellyel a j-edik állapotból eljuthatunk az i-edik állapotba.

Oldjuk meg tehát a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

egyenletet, ahol $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.