Bevezetés a számításelméletbe I.
2003. NOVEMBER 3.-4.
8. gyakorlat: Mátrixok rangja, inverze

1. Legyen U és V két n dimenziós vektortér, és közte $\mathcal{A}$ lineáris leképezés olyan, hogy minden $\underline{v} = A\underline{u}$-ra $\underline{v}(1) := \underline{u}(1) - \underline{u}(2)$, $\underline{v}(2) := \underline{u}(2) - \underline{u}(3), \ldots,$ és $\underline{v}(k) := \underline{u}(k) - c\underline{u}(1)$. A c paraméter mely értékére lesz $Ker(\mathcal{A}) = \{\underline{0}\}$.

2. **ZH!** Jelölje f egy n dimenziós vektortér olyan lineáris transzformációját, melynek mátrixára teljesül, hogy $A \cdot A = 0$ (csupa 0 mátrix). Bizonyítsuk be, hogy ekkor $dim(Kerf) \geq n/2$.

3. **ZH!** Mennyi a rangja az alábbi mátrixoknak?
a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

4. **ZH!** Határozzuk meg az alábbi mátrix által definiált lineáris leképezés magterének dimenzióját a c paraméter függvényében.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & c \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **ZH!** Az $n \times n$-es A és B mátrixokra teljesül, hogy $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$.

6. **ZH!** Legyen A egy $n \times n$-es invertálható mátrix, B pedig egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $AB = 0$ (csupa 0 mátrix). Igazoljuk, hogy ekkor $B = 0$.

7. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, amennyiben léteznek!
a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

8. **ZH!** Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét!
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. **ZH!** Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$