Bevezetés a számításelméletbe I.
2003. OKTÓBER 20-21.
6. gyakorlat: Determinánsok

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát!

a) $\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 123456 & 123426 \\ 123457 & 123427 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1111 & 111 & 11 \\ 11111 & 1111 & 111 \\ 12345 & 1234 & 123 \end{pmatrix}$

2. **ZH!** Állapítsuk meg, hogy n-től függően mi lesz egy $n \times n$-es mátrix determinánsának felírásában a mellékátlóban álló elemek szorzatának előjele.

3. **ZH!** Az $1, 2, \ldots, n$ számok tetszőleges σ permutációjához rendeljük hozzá a $J(\sigma)$ számot, ami a $\sigma(1)\sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ sorozatban azon elempárok száma, melyek nem állnak inverzióban egymással, és legyen $I(\sigma)$ a σ az inverziók száma. Mely n-ekre létezik olyan σ permutáció, hogy $I(\sigma) = J(\sigma)$?

4. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   (a) Ha egy $n \times n$-es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a mátrix determinánsa 0.

   (b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.

   (c) Ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $k \times l$-es csupa 0 téglalap, és $k + l > n$, akkor a mátrix determinánsa 0.

   (d) Bármelyik 100×100-as, nem nulla determinánsú mátrixban mindig van olyan elem, amely megváltoztatásával elérhetjük, hogy a determináns értéke 0 legyen.

5. **ZH!** Hogyan változik meg egy $n \times n$-es valós elemű mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentetjére cseréljük?

6. **ZH!** Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, és jelöljük a i-edik sorának j-edik elemét $a_{i,j}$-vel. Legyen B olyan $n \times n$-es mátrix, hogy $b_{i,j} := \frac{i}{j} a_{i,j}$ minden $1 \le i, j \le n$-re. Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy $det(A) = 1$?

7. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat!

a) $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{ha } i = j, \\ 1 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ b) $a_{i,j} = min(i, j)$ c) $a_{i,j} = i + j$

8. **ZH!** Lehet-e 0 az alábbi determinánsok értéke? Milyen n-re?

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ \ldots & & & \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \ldots & n^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 111 & 100 & 225 & 235 \\ 220 & 312 & 220 & 410 \\ 215 & 180 & 268 & 305 \\ 315 & 145 & 205 & 122 \end{vmatrix}$

9. **ZH!** Igazoljuk, hogy ha az $n \times n$-es A mátrixnak minden eleme $+1$ vagy -1, akkor $det(A)$ osztható 2^{n-1}-el.

ALK-6

Egy olajtársaság három fúrást végzett el, és mindegyik fúrásnál érzékelni tudták, hogy milyen magasságban kezdődik az olajréteg, és hol ér véget. Az első fúrást a $(10, 22)$ koordinátákban végezték el a térkép szerint, és 50m-től 73m-ig találtak olajat. A második fúrást a $(20, 25)$ helyen végezték el, és 47m-től 70m-ig volt olaj. A jarmadik fúrást a $(12, 10)$ koordinátákban, és 67m-től 80m-ig találtak olajat. Hány köbméter olajra számíthatnak összesen, ha a lent lévő olaj mennyiségét a fúrásokból kapott hat csúcsú test térfogatából becsülik meg?

Használjuk fel a háromszög területére, és a tetraéder térfogatára vonatkozó alábbi képleteket:

$$T = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Ahol $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ a háromszög pontjai, és $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$, $P_4(x_4, y_4, z_4)$ a tetraéder csúcsai.

FUN-6

A visegrádi négyek közös hadgyakorlatot tartanak, ahol összesen 390 katona, 60 teherautó, 22 harckocsi és 10 repülő vesz részt. Azt tudjuk, hogy minden ország valahány speciális szakasszal van jelen, és minden szakasz országonként ugyanolyan létszámú és felszereltségű. A szlovákoknál egy szakaszban 40 katona és 8 teherautó van, a cseheknél 30 katona, 6 teherautó, 2 harckocsi és 3 repülő. A lengyeleknél egy szakaszba 40 katona, 4 teherautó, 3 harckocsi és 1 repülő tartozik, egy magyar szakasz pedig 30 katonából, 5 teherautóból és 2 harckocsiból áll. Hány szakasz képviseli Magyarországot a hadgyakorlaton?

Használjuk fel a lineáris egyenletrenszer egy változójának meghatározásához a determinánsos képletet:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ b_4 & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix}}$$