Bevezetés a számításelméletbe I.
2003. OKTÓBER 14.
5. gyakorlat: Lineáris leképezések

1. Mi a magtere, képtere a szokásos háromdimenziós tér alábbi lineáris transzformációinak? Mik a leképezésekhez tartozó mátrixok?
   (a) Az identitás transzformáció
   (b) A zérus transzformáció
   (c) Az x-tengelyre való vetítés
   (d) Az $y - z$ síkra való vetítés
2. Adjunk példát olyan transzformációra, amelynél a magtér és a képtér megegyezik.
3. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok a sík vektorterén?
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}$
4. Lássuk be a következőt:
   $$\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} cosk\phi & -sink\phi \\ sink\phi & cosk\phi \end{pmatrix}$$
5. Mi a magtere és képtere az alábbi leképezésnek: $f \to f(1)$, ahol a valós függvények teréből a valósok terére képezünk.
6. A legfeljebb 5-ödfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak R felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy Φ lineáris transzformációja. Írjuk fel Φ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban.
7. Igazoljuk, hogy bármely A lineáris leképezés esetén tetszőleges $\underline{u}$, $\underline{v}$ vektorokra $A(\underline{u}) = A(\underline{v})$ akkor és csak akkor igaz, ha $\underline{u} - \underline{v} \in KerA$.
8. Tudjuk, hogy egy A lineáris transzformáció magtere csak a nullvektorokból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat:
   (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor.
   (b) Bármely két vektor képe különböző.
   (c) A képtér dimenziója megegyezik a kiindulási vektortér dimenziójával.
9. Legyen A mátrix által a V vektortéren megvalósított lineáris transzformáció olyan, hogy $KerA$ tartalmazza ImA-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = 0$.

ALK-5

A 32 betűből álló ábécé betűinek megfeleltetett 5 hosszú bináris kódokat küldünk át egy csatornán, de előtte összeadjuk a biteket, és az összeget hozzáírjuk a kódhoz (paritásbit). Mindezt annak érdekében tesszük, hogy ha esetleg egy bit „elmosódna” a küldés során, akkor is vissza tudjuk fejteni az üzenetet. Mi a leképezés magtere, képtere és a hozzá tartozó mátrix (modulo 2 számolunk!)? Tudunk-e olyan eljárást adni, amely nem növeli meg nagyon a küldendő kód hosszát, de biztosítja azt, hogy ha két bit is elmosódik az üzenetben, akkor is meg tudjuk fejteni azt?

FUN-5

Egy digitális trükköket készítő program olyan egyszerűen kezelhető, hogy minössze azt kell megadni neki, hogy hová kerüljön a kamera, és mire fókuszáljon. Egy film rendezőjének az az elképzelése, hogy a kamera a kezdeti állapotban 1m-ről mutassa a főszereplőt oldalról; 2 másodperc alatt távolodjon el a célszemélytől összesen 10m-re. Ezután a földön maradva, a főszereplőtől nem távolodva el forduljon 45 fokot 3 másodperc alatt, hogy jobban látszódjon az arca, végül egy hirtelen mozdulattal menjen a kamera a főszereplő feje fölé 1 másodperc alatt. Próbáljuk meg megadni a kamera helyét a főszereplőhöz viszonyítva, a mozgást generáló térbeli leképezés mátrixának segítségével, akkor ha csak a végpontokra vagyunk kiváncsiak, illetve akkor is, ha a kamera helyzetét az idő függvényében is szeretnénk tudni.