Bevezetés a számításelméletbe I.
2003. OKTÓBER 6-7.
4. gyakorlat: Vektorterek

1. Döntsük el, hogy az összes valós számon értelmezett valós értékű függvények alábbi részhalmazai vektorteret alkotnak-e a valós test felett?
   (a) A folytonos függvények
   (b) a legfeljebb öt pontban szakadó függvények
   (c) páros függvények
   (d) polinomfüggvények
   (e) $\{f|f(5) \geq 0\}$
   (f) $\{f|f(5) = f(8)\}$

2. Legyen $V = \{c \in \mathbb{R}|c \geq 3\}, T = \mathbb{Q}$ és definiáljuk az összeadást, és a skalárral való szorzást a következőképpen: $(u, v \in V, \alpha \in T)$
$$u + v = max(u, v), \alpha * v = v$$
   Altere-e ennek a térnek a $W = \{c \in \mathbb{R}|c \geq 5\}$ halmaz?

3. Az $\underline{a}, \underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok elemei, W pedig altere egy vektortérnek, továbbá $\underline{a}+\underline{b} \in W$, $\underline{c}+3\underline{a} \in W$, de $\underline{b}+2\underline{c} \notin W$. Mutassuk meg, hogy $6\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c} \in W$, és hogy $5\underline{a} + 3\underline{b} + \underline{c} \notin W$.

4. Adott két 3-hosszú kódszó a moduló 7 test felett: $(2, 2, 5)$ és $(1, 4, 5)$. Elő tudjuk-e állítani belőlük a $(0, 2, 4)$ kódszót?

5. Az alábbi halmazok vektorteret adnak a valós test felett. Keressünk bennük minél több vektorból álló lineárisan független rendszert és minél kevesebb vektorból álló generátorrendszert!
   (a) Az összes térvektor
   (b) Az összes legfeljebb n-edfokú egyváltozós polinom.
   (c) Az összes $n \times n$-es valós elemű mátrix.

6. **ZH!** Egy vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok is, a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_l$ vektorok is külön-külön lineárisan független rendszert alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy ha $< \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k > \cap < \underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_l >= \{0\}$, vagyis a két generált altér metszete csak a nullvektorból áll, akkor ez a $k + l$ darab vektor együtt is lineárisan független!

7. (a) Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$?
   (b) Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$ lineárisan függetlenek. Lineársan független-e ebben a térben $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$?

ALK-4

Az 5 hosszú bináris kódok vektorteret alkotnak. (A kódszavak 5 hosszú $0, 1$ vektorok, a modulo 2 test felett, ahol az összeadás bitenként történik.) Hány darab kód szerepel az alaphalmazban? Adjuk meg a kódok terének egy lehetséges bázisát! Alteret alkotnak-e a 0-bitre végződő kódok? és az 1-re végződők?

FUN-4

Egy kirándulás során két bográcsban is főznek paprikáskrumplit. Egy jó paprikáskrumli, ha a tűz és az egyéb feltételek adottak, akkor elsősorban a krumpli, kolbász és paprika megfelelő arányán múlik. Az egyik bográcsban 20kg krumpliból, 5kg kolbászból és 15g paprikából főzik az ebédet, míg a másikban 25kg krumpliból, 4kg kolbászból és 20g paprikából. Egyszer kiszámítottuk, hogy számunkra az ideális tányér paprikáskrumpliban pontosan 0.46kg krumpli, 0.088kg kolbász és 0.9g paprika kell legyen. A bográcsokban a merőkanalak akkorák, hogy minkét kanállal a hozzá tartozó bográcsból pont 250-szer kell merni, hogy kiürüljön, és feltesszük, hogy minden merőkanálban az alapanyagok ugyanolyan arányban vannak jelen. Elő tudjuk-e állítani a megfelelő keveréket, úgy hogy mindkét bográcsból szedünk? És ha igen, akkor hány merőkanállal szedjünk az egyik illetve a másik bográcsból?