Bevezetés a számításelméletbe I.

2003. SZEPTEMBER 22-23.

2. gyakorlat: Komplex számok

1. Legyen $z = 1 + \sqrt{3}i$ és $w = 2 - 2i$ két komplex szám.
   (a) Ábrázoljuk a számokat a komplex síkon, és írjuk fel a trigonometrikus alakjukat!
   (b) Mennyi a két szám összege, szorzata illetve hányadosa?
   (c) Határozzuk meg z konjugáltjának és gyökeinek kanonikus alakját!

2. Oldjuk meg a következő egyenleteket!
   (a) $z^2 + 3 = 0$
   (b) $z^2 - 1 - \sqrt{3}i = 0$
   (c) $z^2 - 4z + 5 = 0$
   (d) $z + \bar{z} = 2|z|$
   (e) $\bar{z} = z^{2003}$

3. Milyen számokat kapunk, ha az $a + bi$ komplex számnak megfelelő pontot tükrözzük a valós tengelyre, a képzetes tengelyre, illetve az $x = y$ egyenesre?

4. Jellemezzük azon komplex számokat, melyeknek összege valós, szorzata valós, illetve negyzetösszege valós?

5. **ZH!** Milyen n-ekre lesz valós a $(\sqrt{3} - i)^n$ komplex szám?

6. **ZH!** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében!
$$z(1 + i) - \bar{z}(1 - i) = 2i$$

7. **ZH!** Számítsuk ki
$$\left(\frac{3 - i}{2 - 4i}\right)^{2003}$$
értékét!

8. **ZH!** Adjuk meg az alábbi kifejezés által definiált komplex szám kanonikus alakját:
$$\frac{(-1 + i)^{1998}}{(1 + i)^{2000}}$$

9. Mutassuk meg, hogy egységgyökök szorzata is egységgyök! Mi a feltétele annak, hogy az egységgyökök összege is egységgyök legyen?

10. Mennyi az n-edik egységgyökök szorzata, illetve összege?

11. **ZH!** A kétezredik egységgyökök közül hány olyan van, melynek az ezredik hatványa is eggyel egyenlő?

ALK-2

A vidámparkban András felült egy óriáskerékre, amelynek a 20m átmérőjű nagy kerekén még 6 helyen van egy-egy 4m átmérőjű kis kerék, amelyen 4-4 szék forog körbe. A nagy kerék 1 perc alatt, a kis kerekek 12s alatt tesznek meg egy kört egymással megegyező irányban. Milyen pályát ír le András? Hol van a 48. másodpercben? Fejezzük ki helyzetét az idő függvényében, ha kezdetben a szerkezet legalsó pontjáról indul! Feltéve, hogy a nap pont felette van, milyen mozgást végez az árnyéka?

FUN-2

Anti szeret kirándulni, és idén születésnapjára egy olyan karórát kapott, amely egyben iránytűként is funkcionál. Karcsival együtt azt találják ki, hogy délben elindulnak és tesznek egy 12 óra hosszú túrát, de csak olyan órákban gyalogolnak, amelynek nincs közös osztója 12-vel, és ekkor pontosan abban az irányban haladnak amerre a kismutató fog mutatni az adott óra végén, feltéve, hogy az órán észak mindig a 12-es számhoz van állítva. (1h-től 4h-ig például egyáltalán nem mennek, és 4-től 5-ig arra haladnak, amerre az 5-ös van a karórán.) Hány kilómétert tesznek meg összesen, ha a $6\frac{km}{h}$ sebességet egyenletesen tartják, és milyen messze jutnak összességében a kiindulási helytől éjfélre?