Bevezetés a számításelméletbe I.
2003. NOVEMBER 17.-18.
10. gyakorlat: Számosságok

1. Mi a számossága az alábbi halmazoknak?
   (a) A természetes számok véges részhalmazai.
   (b) A természetes számok részhalmazai.
   (c) Azok az $1, a_1, a_2, \ldots$ sorozatok, melyekben a szomszédos elemek hányadosa $1/2$ vagy 2.
   (d) Azok az x-ből és y-ból álló sorozatok, melyekben csak véges sok y fordul elő.
   (e) Az egész számokból álló $n \times n$-es mátrixok.
   (f) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.
   (g) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek a területe egész szám.
   (h) A síkon egy háromszög belső pontjai.
   (i) A racionális számokból álló végtelen sorozatok.
   (j) A természetes számok összes permutációja.
   (k) A folytonos valós függvények.
2. **ZH!** Mi az olyan z komplex számok halmazának számossága, amikre teljesül, hogy $z \cdot \bar{z}$ egész szám?
3. **ZH!** Mi a számossága annak a számhalmaznak, melynek elemei azok a számok, melyek felírhatók $a + b\sqrt{k}$ alakban úgy, hogy a k pozitív egész, a és b pedig racionális számok?
4. **ZH!** Tekintsük a síkon azon négyzetek halmazát, melyeknek legalább az egyik csúcsa egész koordinátájú. Mennyi ennek a halmaznak a számossága?
5. **ZH!** Mi a valós számokon megadható olyan nyílt intervallumok halmazának számossága, melyeknek mindkét végpontja racionális szám?
6. **ZH!** Mennyi az olyan nullával kezdődő végtelen hosszú sorozatok halmazának számossága, melyekben bármely két szomszédos tag különbsége ± 1?
7. **ZH!** Mi a számossága az olyan x valós számok halmazának, melyekhez található olyan n pozitív egész szám, amire x^n racionális?
8. Bebizonyítandók a következők:
   (a) $\omega^k = \omega, c^k = c \forall k \in \mathbb{N}$-re
   (b) $2^\omega = \omega^\omega = c^\omega = c$
   (c) $2^c = \omega^c = c^c$
9. Ha A végtelen halmaz és $|A| > |B|$, akkor $|A \setminus B| = |A|$.