Bevezetés a számításelméletbe II.

2006. MÁRCIUS 28.

7. gyakorlat: Élszínezés, perfekt gráfok, Turán tétel

1. Mennyi a Petersen-gráf élkromatikus száma (χ_e)?

2. **ZH!** A G páros, egyszerű gráfban minden pont foka r ($r \geq 2$). Osszuk fel G egy tetszőleges élét egy ponttal. Mennyi a keletkezett G' gráf $\chi_e(G')$ élkromatikus száma?

3. Egy körmérkőzéses bajnokságot hány forduló alatt tudunk lejátszani, ha
   (a) páros számú játékos
   (b) páratlan számú játékos van a bajnokságban?

4. Mennyi $\chi_e(K_{2n} - \{n \text{ darab független él}\})$?

5. Mely n-ekre lesz $L(K_n)$, az n-szögpontú teljes gráf élgráfja perfekt?

6. **ZH!** A G gráf csúcsai legyenek a 8×8-as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos G-ben, ha egy lóugrásnyira vannak egymástól.
   (a) Határozzuk meg G kromatikus számát, $\chi(G)$-t!
   (b) Bizonyítsuk be, hogy G perfekt!

7. **ZH!** Legyen G olyan gráf, melyre $\chi(G) = k$. Bizonyítsuk be, hogy G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon.

8. Legyen G összehasonlítási gráf (két csúcs pontosan akkor van összekötve benne, ha egy rendezés szerint az egyik nagyobb, mint a másik), és legyenek az élei úgy irányítva, hogy a rendezés szerint mindig a nagyobb felé mutassanak. Minden csúcs mellé írjuk oda a belőle induló leghosszabb irányított út csúcsainak számát.
   (a) Bizonyítsuk be, hogy szomszédos csúcsok mellé nem írtuk ugyanazt a számot!
   (b) Bizonyítsuk be, hogy G perfekt!

9. Bizonyítsuk be, hogy egy intervallum gráf komplementere összehasonlítási gráf!

10. **ZH!** Legkevesebb hány csúcsa lehet egy olyan G egyszerű gráfnak, amely nem tartalmaz háromszöget és éleinek száma legalább kétszerese az n csúcsú teljes gráf élei számának?

11. **ZH!** Minimálisan hány éle kell hogy legyen egy olyan n csúcsú egyszerű gráfnak, amely háromszögmentes, de tetszőleges két még összekötetlen csúcsát összekötve keletkezik benne háromszög?

12. **ZH!** Egy 90 fős társaságból bizonyos párok leveleznek egymással. Akárhogyan választunk ki közülük 10 embert, ezek között mindig van legalább kettő, akik leveleznek egymással. Bizonyítsuk be, hogy a levelező párok száma legalább 405.