Bevezetés a számításelméletbe II.

2006. MÁRCIUS 13.

5. gyakorlat: Párosítások 2., König-Gallai

1. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!

2. Bizonyítsd be, hogy egy reguláris páros gráfban mindig létezik teljes párosítás!

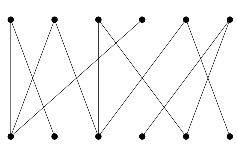
3. Lássuk be, hogy egy reguláris páros gráf élhalmaza partícionálható teljes párosításokra! (Tehát az élek kiszínezhetőek r db színnel úgy, hogy mindegyik egyszínű élhalmaz egy teljes párosítást adjon.)

4. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!

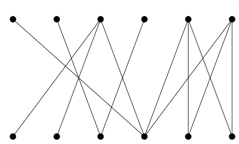
5. Egy ünnep alkalmával török szultán udvarában a férfiak két-két háremhölgyet választanak. Minden férfinek legalább 2 háremhölgy tetszik. Mi a feltétele annak, hogy minden férfi neki tetsző két háremhölggyel tölthesse az éjszakát?

6. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!

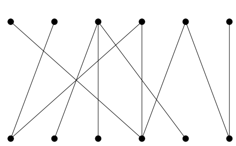
(a)



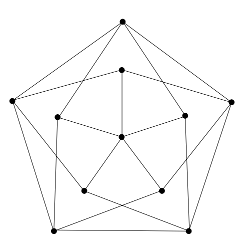
(b)



(c)

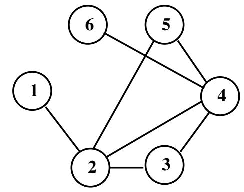


(d)



7. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \dots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i+j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$ – független pontok maximális, $\nu(H)$ – független élek maximális, $\rho(H)$ – a lefogó élek minimális, $\tau(H)$ – lefogó pontok minimális számát!

8. Hat ember jár egy teniszklubba, de vannak, akik nem szívesen játszanak együtt. A lenti gráf mutatja azt, hogy ki-kivel játszik szívesen együtt.



Adjunk választ a következő kérdésekre:

   (a) Egy nap mindenki eljött a klubba. Legalább hány mérkőzést kellett összesen lejátszaniuk ahhoz, hogy mindegyik játékos elmondhassa, hogy teniszezett aznap.

   (b) Másnap is eljött mindenki, de olyan fáradtak voltak, hogy mindenki legfeljebb egyszer akart játszani. Legfeljebb hány meccs lehetett azon a napon?

   (c) A következő napon nem jött el pár ember, és senki sem talált magának megfelelő partnert. Legalább hány ember hiányzott?

   (d) Az utolsó napon megint nem sikerült egy párt sem összehozniuk, és ezért bánatukban feloszlatták az egész klubbot. Legfeljebb hány ember lehetett ebben az utolsó összejövő társaságban?

9. Határozzuk meg az alábbi gráfokra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit?

   (a) $K_{3,3}$,

   (b) K_5

   (c) $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2004}\}$ és $(v_i, v_j) \in E(G)$, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad.

   (d) Petersen-gráf

10. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n-1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?

11. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$

12. Igazoljuk, hogy minden egyszerű G gráfban $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ és létezik olyan gráf is, melyre az egyenlőség teljesül.

13. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.

14. Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét. Mutassuk meg, hogy: $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$

15. Legyen G egy 100 csúcsú síkgráf komplementere. Legalább mennyi lesz $\tau(G)$?