Bevezetés a számításelméletbe II.

2006. MÁJUS 9.

13. gyakorlat: Gyűrűk, testek

1. Gyűrűt, testet vagy ferdetestet alkotnak-e az alábbi halmazok (a szokásos összeadással és szorzással) ?
   (a) $\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
   (b) $\{a + b\sqrt[3]{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$,
   (c) egész együtthatós polinomok,
   (d) $\{0, 1\}$ a modulo 2 összeadással és szorzással,
   (e) a 4×4-es mátrixok,
   (f) a 4×4-es mátrixok, melyek determinánsa nem nulla, valamint a 4×4-es nulla mátrix
   (g) $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$ alakú mátrixok, ahol $a, b \in \mathbb{R}$,
   (h) a kvaterniók.
2. Egy $x \neq 0$ gyűrűelem baloldali nullosztó, ha $\exists y \neq 0$, hogy $xy = 0$. Legyen x_1 és x_2 baloldali nullosztó. Bizonyítsuk be, hogy $x_1 x_2$ is baloldali nullosztó, de $x_1 + x_2$ nem feltétlenül az!
3. A mod 12 maradékosztályok gyűrűjében mely elemeknek van multiplikatív inverzük? Melyek a nullosztók?
4. Adjunk példát az $n \times n$-es mátrixok gyűrűjében nullosztókra!
5. Vizsgáljuk a páros számok gyűrűjét.
   (a) Mutassuk be példákon keresztül, hogy itt a prímtulajdonságú számok és a felbonthatatlan számok halmaza különbözik!
   (b) Mutassuk meg, hogy itt nem teljesül a számelmélet alaptétele!
6. Legyen R egy nullosztómentes gyűrű. Bizonyítsuk be, hogy ha egy a elemre:
   (a) $a^2 = a$, akkor $a = 0$ vagy $a = 1$,
   (b) $a^k = a$ (tetszőleges k egészre), akkor $a = 0$.

   Mutassuk meg, hogy egy nem nullosztómentes gyűrűben a fentiek nem igazak!
7. Lássuk be, hogy minden ferdetest nullosztómentes!
8. Igazoljuk, hogy ha egy testben $a + a = 0$ teljesül valamely $a \neq 0$ elemre, akkor minden elemre teljesül!