

**Bevezetés a számításelméletbe II.**

2006. ÁPRILIS 18.

*10. gyakorlat: Euler-Fermat tétel, algebrai alapfogalmak*

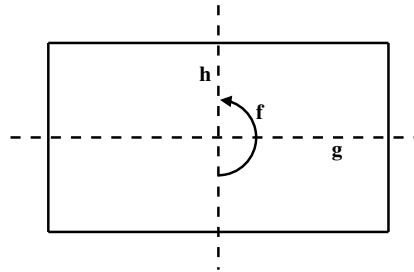
1. Számítsuk ki az alábbi értékeket:
  - (a)  $d(12)$ ,  $\phi(12)$ ,  $\sigma(12)$ ,
  - (b)  $d(2004)$ ,  $\phi(2004)$ ,  $\sigma(2004)$ .
2. Mennyi  $\phi(9)$ ,  $\phi(133)$ ,  $\phi(540)$ ,  $\phi(7!)$ ?
3. **ZH!** Milyen  $n$  értékekre igaz, hogy  $\phi(n)$  páratlan? (és milyen  $n$ -ekre lesz  $d(n)$  páratlan?)
4. Az Euler-féle  $\phi$  függvény tulajdonságait felhasználva,
  - (a) bizonyítsuk be, hogy  $11 \mid n^{11} + 10n$ ,
  - (b) igazoljuk, hogy ha  $n$  nem osztható 17-tel, akkor  $n^8 + 1$  vagy  $n^8 - 1$  biztosan osztható 17-tel,
  - (c) számítsuk ki  $108^{182}$  ill.  $5^{17}$  maradékát 19-cel osztva,
  - (d) bizonyítsuk be, hogy  $42 \mid n^7 - n$ .
5. Bizonyítsuk be, hogy
  - (a)  $39^{14} - 1$  osztható 5-tel,
  - (b)  $333^{444} + 444^{333}$  osztható 7-tel,
  - (c)  $4^{90} + 1$  osztható 17-tel!
6. Kiszámítandó  $((43^{43})^{43})^{43}$  modulo 49.
7. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:
  - (a)  $49^{49} \equiv x \pmod{15}$ ,
  - (b)  $3^{80}x \equiv 23 \pmod{100}$ .
8. Határozzuk meg az utolsó
  - (a) három jegyét számjegyét  $403^{402}$ -nek,
  - (b) két számjegyét  $29^{39^{49}}$ -nek,
  - (c) számjegyét  $7^{6^{5^{4^{3^2}}}}$ -nek!

9. Csoportot alkotnak-e az alábbi halmazon definiált műveletek? Ha igen, akkor vizsgáljuk meg, hogy a csoport kommutatív-e?
  - (a) {egész számok, összeadás},
  - (b) {páratlan számok, összeadás},
  - (c) {páros számok, összeadás},
  - (d)  $\{2 \times 2$ -es mátrixok, mátrixszorzás},
  - (e)  $\{n$ -edik komplex egységgyökök, szorzás},

10.  $a^2 = 1 \quad \forall a \in G$ -re  $\implies G$  – Abel-csoport.

11. Írjuk fel az alábbi csoportok Cayley-táblázatát! Melyek izomorfak egymással?

- (a) {mod 4 maradékosztályok, összeadás}
- (b) {mod 8 redukált maradékosztályok, szorzás}
- (c) A téglalap szimmetriacsoportja: (szimmetriacsoport = a rajzot önmagába vivő egybevágósági transzformációk halmaza a kompozícióra, mint műveletre nézve!)



- (d) A „füles négyzet” szimmetriacsoportja:

