

**Bevezetés a számításelméletbe I.**  
2005. OKTÓBER 28. ÉS NOVEMBER 2.  
8. gyakorlat: Mátrixok rangja, inverze

1. **ZH!** Mennyi a rangja az alábbi mátrixoknak?

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. **ZH!** Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját  $c$  paraméter függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & c \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

- (a) Egy mátrix egy elemét megváltoztatva a rang legfeljebb 1-el változik.
- (b) Bármelyik mátrixban van olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja megváltozik.
- (c) Ha az  $A$  mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az  $A\underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszer megoldható.
- (d) Ha az  $A$  mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az  $A\underline{x} = \underline{b}$  egyenletrendszer megoldható.

4. **ZH!** Az  $n \times n$ -es  $A$  és  $B$  mátrixokra teljesül, hogy  $AB = A$  és  $BA = B$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $A^2 = A$  és  $B^2 = B$ .

5. **ZH!** Legyen  $A$  egy  $n \times n$ -es invertálható mátrix,  $B$  pedig egy olyan  $n \times n$ -es mátrix, amelyre  $AB = 0$  (csupa 0 mátrix). Igazoljuk, hogy ekkor  $B = 0$ .

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, amennyiben léteznek!

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

7. **ZH!** Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét!  
Oldjuk meg  $n \times n$ -es mátrixra is!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. **ZH!** Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$