

Bevezetés a számításelméletbe I.

2005. OKTÓBER 11-12.

5. gyakorlat: Vektorterek 2.

1. **ZH!** Vektorteret adnak-e az alábbi valóselemű mátrixok szokásos (tehát elemenkénti) összeadásra és valós számmal való szorzásra nézve?

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R, a + b = 5 \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b, c \in R, a + b = 0 \right\}$

2. (a) Kifejezhető-e a $(2, 1, 0)$ vektor az $(1, 1, 1)$ és az $(1, 2, 3)$ vektor lineáris kombinációjaként? Írjuk fel a két vektor által generált, origón átmenő sík egyenletét!

(b) Oldjuk meg a következő egyenletet x, y valós ismeretlenekre:

$$x + 3xa + 5xa^2 + 2y + 7ya - ya^2 = 1 + 4a - 6a^2$$

(c) Léteznek-e olyan α, β valós számok, melyekre a következő lineáris kombináció fennáll:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

3. (a) Lineárisan összefüggők-e az $(1, 3, 2)$, $(2, 0, 1)$ és $(5, 6, 5)$ vektorok?

(b) Van-e az alábbi három síknak az origón kívül közös pontja? (1) $x + 2y + 4z = 0$, (2) $3x + 6z = 0$ és (3) $2x + y + 5z = 0$

(c) Lineárisan összefüggő-e a következő 3 kód a moduló 2 test felett? $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ és $(0, 1, 1)$

4. Generátorrendszert alkotnak-e az $(1, 0, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(2, 3, 4, 1)$, $(3, 0, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$ vektorok? Ha igen, válassz ki egy bázist belőle!

5. Az alábbi halmazok vektorteret adnak a valós test felett. Keressünk bennük minél több vektorból álló lineárisan független rendszert és minél kevesebb vektorból álló generátorrendszert!

(a) Az összes térvektor.

(b) Az összes legfeljebb n -edfokú egyváltozós polinom.

(c) Az összes $n \times n$ -es valós elemű mátrix.

6. Tudjuk, hogy $\langle a, b \rangle = \langle c, d, e \rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\{a, c, e\}$ vektorok?

7. **ZH!** Az a_1, a_2, a_3 és a b_1, b_2, b_3, b_4 vektorok generálják ugyanazt a V lineáris teret. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az alábbi négy vektorból álló vektorrendszer lineárisan összefüggő: $a_1 + a_2, a_3 + b_1, a_3 + b_2, b_3 + b_4$.

8. **ZH!** Egy vektortérben az a_1, a_2, \dots, a_k vektorok is, a b_1, b_2, \dots, b_l vektorok is külön-külön lineárisan független rendszert alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy ha a két vektorhalmaz által generált alterek metszete csak a nullvektor, akkor ez a $k + l$ darab vektor együtt is lineárisan független!

9. (a) Legyen $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$?

(b) Legyenek $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a} + \underline{b}$, $\underline{a} + \underline{c}$ és $\underline{b} + \underline{c}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?