

## Bevezetés a számításelméletbe I.

2005. SZEPTEMBER 13-14.

1. gyakorlat: Vegyes, komplex számok 1.

- Helyezzünk el minél több azonos tisztet a sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő se üsse egymást. (Ez figuránként külön feladat.)
- Két pohár közül az egyikben víz, a másikban bor van. Áttöltünk valamennyi vizet a boros pohárba, majd az abban lévő folyadékból visszatöltünk ugyanennyit a vizet tartalmazóba. Miből lesz több: vízből az eredetileg boros pohárban, vagy borból az eredetileg vizesben?
- Hány emeletes kártyavárat tudunk építeni egy magyar-kártya pakliból? Hány lap kell egy  $n$  emeletes kártyavárhoz?
- Hány mérkőzésre van szükség, ha tíz teniszjátékos közül szeretnénk megtudni, hogy ki a legjobb (nincs formahanyatlás)? És ha arra is kíváncsiak vagyunk, hogy ki a leggyengébb?
- Egy kosárlabda-mérkőzésen a hazai csapat 78 pontjából legalább hány pontot szerezhettek a legeredményes játékosuk, ha tudjuk, hogy aznap heten találtak be a csapatból?
- Bizonyítsuk be, hogy egy hatfős társaságban, ha két ember vagy kölcsönösen szereti, vagy kölcsönösen utálja egymást, akkor biztosan találunk hármat közülük, akik vagy mind szeretik, vagy mind utálják egymást!
- Egy teknősbéka 6 percig sétált, ami közben többen figyelték. Minden pillanatban valaki rajta tartotta a szemét, és mindenki pontosan 1 percet figyelte, ami alatt sohasem haladt többet 1 méternél. Lehetséges-e, hogy összesen mégis többet haladt előre 6 méternél?
- Egy kör alakú városban 12 ór teljesít szolgálatot. Délben mindegyik elindul az őrhelyéről a falon valamelyik irányba olyan sebességgel, amellyel egy óra alatt kerülné meg a várost. Ha két ór szembetalálkozik, akkor sarkon fordulnak és változatlan sebességgel haladnak tovább az ellenkező irányban. Bizonyítsuk be, hogy pontban éjfélkor minden egyes ór a saját helyén lesz.
- Legyen  $z = 1 + \sqrt{3}i$  és  $w = 2 - 2i$  két komplex szám.
  - Ábrázoljuk a számokat a komplex síkon, és írjuk fel a trigonometrikus alakjukat!
  - Mennyi a két szám összege, szorzata illetve hányadosa?
  - Határozzuk meg  $z$  konjugáltjának és négyzetgyökeinek kanonikus alakját!
- Hol van a hiba a következő levezetésben?  $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i \cdot i = -1$
- Oldjuk meg a következő egyenleteket!
  - $z^2 + 3 = 0$
  - $z^2 = i|z|$
  - $z^2 = iz$
  - $|z| = 2z + i$
  - $z^2 - 1 - \sqrt{3}i = 0$
  - $z^2 - 4z + 5 = 0$
  - $z + \bar{z} = 2|z|$
- Mi  $|z|$ ,  $|z_1 - z_2|$ ,  $iz$  geometriai jelentése? Milyen számokat kapunk, ha az  $a + bi$  komplex számnak megfelelő pontot tükrözzük a valós tengelyre, a képzetes tengelyre, illetve az  $x = y$  egyenesre?
- Jellemezzük azon  $a + bi$  és  $c + di$  alakú komplex számokat, melyeknek összege valós, szorzata valós, illetve négyzetösszege valós?
- ZH!** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében!
$$5(z^2 + (\bar{z})^2) = z(12 - 6i)$$
- ZH!** Oldjuk meg az alábbi egyenletet a komplex számok körében!
$$z(1 + i) - \bar{z}(1 - i) = 2i$$