

Bevezetés a számításelméletbe I.

2005. NOVEMBER 15-16.

10. gyakorlat: Számosságok

1. Mi a számossága az alábbi halmazoknak?
 - (a) A természetes számok véges részhalmazai.
 - (b) A természetes számok részhalmazai.
 - (c) Azok az $1, a_1, a_2, \dots$ sorozatok, melyekben a szomszédos elemek hányadosa $1/2$ vagy 2 .
 - (d) Azok az x -ből és y -ből álló sorozatok, melyekben csak véges sok y fordul elő.
 - (e) Az egész számokból álló $n \times n$ -es mátrixok.
 - (f) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek minden koordinátája egész szám.
 - (g) Azon síkbeli háromszögek, melyeknek a területe egész szám.
 - (h) A síkon egy háromszög belső pontjai.
 - (i) A racionális számokból álló végtelen sorozatok.
 - (j) A természetes számok összes permutációja.
 - (k) A folytonos valós függvények.
2. **ZH!** Mi az olyan z komplex számok halmazának számossága, amikre teljesül, hogy $z \cdot \bar{z}$ egész szám?
3. **ZH!** Mi a számossága annak a számhalmaznak, melynek elemei azok a számok, melyek felírhatók $a + b\sqrt{k}$ alakban úgy, hogy a k pozitív egész, a és b pedig racionális számok?
4. **ZH!** Tekintsük a síkon azon négyzetek halmazát, melyeknek legalább az egyik csúcsa egész koordinátájú. Mennyi ennek a halmaznak a számossága?
5. **ZH!** Mi a valós számokon megadható olyan nyílt intervallumok halmazának számossága, melyeknek mindkét végpontja racionális szám?
6. **ZH!** Mennyi az olyan nullával kezdődő végtelen hosszú sorozatok halmazának számossága, melyekben bármely két szomszédos tag különbsége ± 1 ?
7. **ZH!** Mennyi az olyan (végtelen hosszú) számtani sorozatok halmazának számossága, melyben az elemek egész számok?
8. **ZH!** Mi a számossága az olyan x valós számok halmazának, melyekhez található olyan n pozitív egész szám, amire x^n racionális?
9. **Bebizonyítandók a következők:**
 - (a) $\omega^k = \omega, c^k = c \forall k \in \mathbb{N}$ -re
 - (b) $2^\omega = \omega^\omega = c^\omega = c$
 - (c) $2^c = \omega^c = c^c$
10. Ha A végtelen halmaz és $|A| \geq |B|$, akkor $|A \setminus B| = |A|$.