Bevezetés a számításelméletbe I.
MEGOLDÁSOK
9. gyakorlat: Sajátérték, sajátvektor

1. A $det(A - \lambda I_n) = 0$-ból a karakterisztikus egyenlet λ-ra a következő:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 1] = 0$$

Ennek megoldásai: $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$

2. A sajátértékeket a karakterisztikus egyenletből kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 7 \\ -3 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(-5-\lambda) + 21 = \lambda^2 - 4 = 0$$

Ennek megoldásai: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$. A hozzájuk tartozó sajátvektorokat a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer ($(A - \lambda_i I_n)s_i = \underline{0}$) megoldásaiként kapjuk:

$$A - \lambda_1 I_n = \begin{pmatrix} 5-(-2) & 7 \\ -3 & -5-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow s_1 = (1,-1) \text{ sv, vagy } S_1 = (x, -x) \text{ saltér}$$

$$A - \lambda_2 I_n = \begin{pmatrix} 5-2 & 7 \\ -3 & -5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} \Longrightarrow s_2 = (7,-3) \text{ sv, vagy } S_2 = (x, -\frac{3x}{7}) \text{ saltér}$$

3. A sajátértékeket a karakterisztikus egyenletből kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 = 0$$

Ennek megoldása: $\lambda = 1$ (háromszoros gyök).
A hozzá tartozó sajátalteret a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer ($(A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0}$) megoldásából kapjuk:

$$A - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow S_\lambda = \{(a, 0, c) \backsim \mathbb{R}^2\}$$

4. Felhasználjuk azt az ismert tételt, hogy minden A mátrix, melynek sajátértékei 1-szeresek (és e miatt a hozzájuk tartozó sajátvektorok függetlenek, és bázist alkotnak a térben!) felbontható $A = SDS^{-1}$ alakban, ahol S a sajátvektorokból álló mátrix, S^{-1} ennek inverze, és D, az a diagonál-mátrix, melynek a főátlójában a sajátértékek állnak. (Az $A = SDS^{-1}$ egyenlet azt jelenti, hogy az A leképezést úgy valósítjuk meg, hogy először áttérünk az S bázis-transzformációval a sajátvektorok alkotta bázisba, melyben az A leképezésnek pontosan a D felel meg, majd S^{-1}-el visszatérünk az eredeti bázisba.)
Az A^k transzformációnak így $A^k = (SDS^{-1})^k = SD^kS^{-1}$ felel meg. Vagyis:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}^{2000} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/4 & -7/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}\right]^{2000} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{2000}\begin{pmatrix} -3/4 & -7/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{2000} & 0 \\ 0 & 2^{2000} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/4 & -7/4 \\ 1/4 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{2000} & 0 \\ 0 & 2^{2000} \end{pmatrix}$$

ugyanis egy azonos elemeket tartalmazó diagonál-mátrixszal való szorzás kommutatív!

5. A leképezéshez tartozó mátrixok a következők: (lásd 5/5 feladat!)

$$\text{a)}\quad A=\begin{pmatrix}0&6&0&0&0&0&0\\0&0&5&0&0&0&0\\0&0&0&4&0&0&0\\0&0&0&0&3&0&0\\0&0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad \text{b)}\quad A=\begin{pmatrix}6&0&0&0&0&0&0\\0&5&0&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0&0\\0&0&0&3&0&0&0\\0&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(a) A sajátértékekek a karakterisztikus egyenletekből kapjuk:

$$A=\begin{vmatrix}-\lambda&6&0&0&0&0&0&\\0&-\lambda&5&0&0&0&0&0\\0&0&-\lambda&4&0&0&0&\\0&0&0&-\lambda&3&0&0&\\0&0&0&0&-\lambda&2&0&\\0&0&0&0&0&-\lambda&1&\\0&0&0&0&0&0&-\lambda&\end{vmatrix}=(-\lambda)^7=0$$

Ennek megoldása: $\lambda=0$
Az ehhez tartozó sajátaltér megegyezik a leképezés magterével:

$$S_0=\{\underline{v}\in V|A\underline{v}=\lambda\underline{v}=\underline{0}\}=\{(0,0,0,0,0,0,c)\backsim\mathbb{R}\}\ \text{(a konstans polinomok.)}$$

(b) A karakterisztikus egyenlet a következő:

$$\begin{vmatrix}6-\lambda&0&0&0&0&0&0\\0&5-\lambda&0&0&0&0&0\\0&0&4-\lambda&0&0&0&0\\0&0&0&3-\lambda&0&0&0\\0&0&0&0&2-\lambda&0&0\\0&0&0&0&0&1-\lambda&0\\0&0&0&0&0&0&-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)(5-\lambda)\dots(1-\lambda)(-\lambda)=0$$

Melynek megoldásai:
$\lambda_0=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3,\ \lambda_4=4,\ \lambda_5=5,\ \lambda_6=6$
A sajátértékek pedig:
$s_0=(0,0,0,0,0,0,1),\ s_1=(0,0,0,0,0,1,0)\dots,\ s_6=(1,0,0,0,0,0,0)$

6. Egy mátrix transzponáltjának determinánsa megegyezik a mátrix determinánsával, továbbá nem számít, hogy a diagonálisból a transzponálás előtt, vagy után vonom ki a λ értékeket. Így:

$$\underline{0}=det(A-\lambda I_n)=det([A-\lambda I_n]^T)=det(A^T-\lambda I_n)$$

7. Először is belátjuk, hogy λ nem lehet 0. Ebben az esetben ugyanis $S_0=Ker(\mathbb{A})\neq\{0\}$, ezért $rang(A)<n\iff A$ nem invertálható.
Szorozzuk be a sajátérték-egyenletet A^{-1}-el balról, majd $\frac{1}{\lambda}$-val:

$$A\underline{v}=\lambda\underline{v}\iff A^{-1}A\underline{v}=A^{-1}\lambda\underline{v}\iff\frac{1}{\lambda}\underline{v}=A^{-1}\underline{v}$$

Tehát a $\frac{1}{\lambda}$ tényleg sajátértéke A^{-1}-nek.