Bevezetés a számításelméletbe I.

MEGOLDÁSOK

8. gyakorlat: Mátrixok rangja, inverze

1. A képtér rangja megegyezik a leképezéshez tartozó A mátrix, rangjával (melyre $A\underline{u} = \underline{v}$). Így a dimenzió-tételből adódik, hogy

$$dim(V_1) - dim(Ker(\mathcal{A})) = dim(Im(\mathcal{A})) = rang(A) = rang \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & -c \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$dim(Ker(\mathcal{A})) = 0 \iff rang(A) = n \iff det(A) = 1 + (-1)^{2n-1}c \neq 0 \iff c \neq 1$$

A determináns kiszámolásakor ugyanis csak a két átló ad olyan szorzatot, amelyben nincs 0 elem.

2. Az 5. gyakorlat 8. feladatnál láttuk, hogy $Im(\mathcal{A}) \subseteq Ker(\mathcal{A}) \iff A^2 = 0$, ebből következik, hogy $dim(Im(\mathcal{A})) \leq dim(Ker(\mathcal{A}))$. Ez a dimenzió-tétellel együtt azt eredményezi, hogy $dim(Ker(\mathcal{A})) \geq n/2$

3. A mátrixok rangjait Gauss-eliminációval számoljuk:

a) $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ \boxed{1} & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-5} & -5 & 3 \\ 0 & -10 & -10 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -15 & -15 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Itt már látszik, hogy a rang 2.

b) $$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-4} \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát a mátrix rangja 3.

4. A magtér dimenziójára teljesül az alábbi összefüggés:
$dim(Ker(\mathcal{A})) = dim(V_1) - dim(Im(\mathcal{A})) = n - rang(A)$, ahol a rang:

b) $$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 3 & -1 & c \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & c-6 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 \\ 0 & -4 & c-6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & c-4 \end{pmatrix}$$

Ezért: $dim(Ker(\mathcal{A})) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \iff rang(A) = \begin{cases} 2 & \text{ha } c = 4 \\ 3 & \text{ha } c \neq 4 \end{cases}$

5. Mivel a feladat szimmetrikus, ezért elég csak az egyik azonosságot belátni!

$$A^2 = (AB)^2 = ABAB = A(BA)B = ABB = (AB)B = AB = A$$

6. Mindkét oldalt A^{-1}-el balról szorozva kapjuk, hogy

$$AB = 0 \iff A^{-1}AB = A^{-1}0 \iff I_nB = 0 \iff B = 0$$

7. A mátrixok inverzeit Gauss-eliminációval számoljuk:

(a) Létezik inverz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3/2 & -1/2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

(b) Létezik inverz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -7 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1/2 & 3/2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -1/2 & -9/2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & -7/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3/2 & 5/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -7/2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & -1 \end{array}\right)$$

(c) Nem létezik inverz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

8. A mátrix inverze a következő:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

9. A mátrix inverze a következő:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -3/2 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2/3 & -2/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \end{array}\right)$$