Bevezetés a számításelméletbe I.

MEGOLDÁSOK

7. gyakorlat: Determinánsok II.

1. $det(A) = 1$, mert felső-háromszög mátrixról van szó, és a főátlóban 1-esek állnak.

2. A függetlenség eldöntésére a vektorok alkotta determinánsokat vizsgáljuk:

$$\text{a)}\quad \text{Függetlenek} \iff 0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\text{b)}\quad \text{Összefüggőek} \iff 0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

3. Tudjuk, hogy a legfeljebb $n-2$-ed fokú polinomok vektortere $n-1$ dimenziós (Lásd 4. gyakorlat 5/b feladat). Ez azt jelenti, hogy ha veszünk ebből a térből n db elemet, akkor ezek lineárisan összefüggnek, vagyis bármelyik közülük kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként. A kikevert polinom függvényértékei persze megegyeznek a lineáris kombinációként előálló polinom függvényértékeivel. Ebből fakadóan az adott determináns valamelyik sora (pontosan az a sor, amelyikhez tartozó f_i függvény előáll a többiből) biztosan előáll a többi lineáris kombinációjaként, tehát a determináns értéke 0.