Bevezetés a számításelméletbe I.

Megoldások

6. gyakorlat: Determinánsok

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát!

   a) $\begin{vmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{vmatrix} = cos^2\phi + sin^2\phi = 1$ b) $\begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 1 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = -2$

   c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6+6+6-27-1-8 = -18$ d) $\begin{vmatrix} 123456 & 123426 \\ 123457 & 123427 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 123456 & 123426 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 30$

   e) $\begin{vmatrix} 1111 & 111 & 11 \\ 11111 & 1111 & 111 \\ 12345 & 1234 & 123 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 111 & 11 \\ 1 & 1111 & 111 \\ 5 & 1234 & 123 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 111 \\ 5 & 4 & 123 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 111 \\ 1 & 4 & 123 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 11 \\ 1 & 111 \end{vmatrix} = 100$

2. A mellékátlóhoz tartozó $(n, n-1, \ldots, 1)$ permutációban minden elempár inverzióban van egymással. A párok száma pedig $\frac{n(n-1)}{2}$. Ez akkor és csakis akkor páros, ha $n = 4k$ vagy $n = 4k+1$. Így a szorzat előjele= $\begin{cases} + & \text{ha } n = 4k \text{ vagy } n = 4k+1, \\ - & \text{ha } n = 4k+2 \text{ vagy } n = 4k+3 \end{cases}$

3. Egy tetszőleges permutációban két elem vagy inverzióban van egymással, vagy nincs, ezért $I(\sigma) + J(\sigma) = \frac{n(n-1)}{2}$ minden permutációra teljesül. A keresett permutációra ezért $I(\sigma) = J(\sigma) = \frac{n(n-1)}{4}$ is igaz. Ez pedig csak akkor lehet, ha az összes pár száma a permutációban páros. (Lásd előző feladat.) És ilyen permutáció tényleg létezik is!

4. (a) Igaz. Ebben az esetben biztosan van csupa-0 sor a mátrixban.

   (b) Hamis. Pl: az $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

   (c) Igaz. Ekkor ugyanis az adott k sorban csak $n - l < k$ oszlopban vannak nem 0 elemek, ezért az adott k sorból kiválasztott elemek közül valamelyik 0 lesz.

   (d) Igaz. Fejtsük ki a determinánst az első sora szerint: $\sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot |A_{1i}| \cdot (-1)^{1+i}$. Az összeg egyik tagja nem 0 kell, hogy legyen, ezért feltehetjük, hogy például sem az a_{1j} elem sem a hozzá tartozó aldetermináns nem 0. Ezek után legyen

   $$a'_{1j} = \left(\sum_{i=1,\ldots j-1, j+1, \ldots, n} a_{1i} \cdot |A_{1i}| \cdot (-1)^{1+i} \right) / |A_{1j}| \cdot (-1)^{1+j}$$

   amelyre A' mátrix determinánsának értéke 0 lesz.

5. Egy sor ellentettre cserélése -1-szeresére változtatja a determinánst, így n sor ellentettre cserélésével a determináns $(-1)^n$-szeresére változik.

6. B mátrixot úgy kaphatjuk meg A mátrixból, hogy az i. sort megszorozzuk i-vel és a j.-oszlopot elosztjuk j-vel. Eközben a determináns értéke rendre szorzódik $1, 2, \ldots, n$-nel illetve osztódik $1, 2, \ldots, n$-nel. Így adódik, hogy $det(B) = det(A) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{n} \cdot = 1$

7. Sor- és oszlop-műveletekkel a következő eredményekre juthatunk:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & 1 \\ \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \ldots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & 3 & 3 \\ \ldots \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n-1 & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n+2 \\ 4 & 5 & 6 & \ldots & n+3 \\ \ldots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \ldots & 2n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \ldots & n+1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{ha } n = 1, \\ -1 & \text{ha } n = 2, \\ 0 & \text{ha } n \geq 3 \end{cases}$$

8. Gauss-eliminációval adódik:

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ \ldots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \ldots & n^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & n & \ldots & n \\ \ldots \\ n & n & \ldots & n \end{vmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{ha } n = 1, \\ -2 & \text{ha } n = 2, \\ 0 & \text{ha } n \geq 3 \end{cases}$$

b) $$\begin{vmatrix} 111 & 100 & 225 & 235 \\ 220 & 312 & 220 & 410 \\ 215 & 180 & 268 & 305 \\ 315 & 145 & 205 & 122 \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \cdots \cdot a_{n,\sigma(n)} \neq 0$$

Ugyanis az összegben csak az az egy tag nem lesz 5-el osztható, amelyik a főátló elemeihez tartozik, így az egész összeg sem adhat 0-t maradékul 5-el osztva, ezért nem lehet 0.

9. Ha az $n \times n$-es A mátrixnak minden eleme $+1$ vagy -1, akkor

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & -1v1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -2v0v2 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 2^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & \ldots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -1v0v1 & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 2^{n-1}k$$

Tehát, ha eliminálunk az első oszlopban, akkor $A_{1,1}$ részmátrixban csak 2, 0 és -2 elemek fordulhatnak elő. Ezután kiemelhetünk minden sorból 2-t ($i = 2, 3 \ldots, n$), és mivel az így kapott aldetermináns is egész marad, ezért az eredeti determináns osztható kell legyen 2^{n-1}-el.