Bevezetés a számításelméletbe I.
Megoldások
4. gyakorlat: Vektorterek

1. A valós számokon értelmezett valós értékű függvények vektorteret alkotnak a valós számtest felett, ezért az alábbi feladatokban csak azt kell megvizsgálnunk, hogy ennek részhalmazai alteret alkotnak-e, vagyis zártak-e a vektortéren értelmezett műveletekre nézve.

   (a) Igen. Két folytonos függvény összege is folytonos. Ugyanis legyen $h(x) := f(x) + g(x)$. $h(x)$ folytonosságához azt kellene belátnunk, hogy minden ϵ-hoz létezik δ, hogy minden x_0 pontban, ha $|x-x_0| < \delta$, akkor $|h(x) - h(x_0)| < \epsilon$. Adott ϵ-ra legyen δ_1 és δ_2 az a környezet, melyre $|x - x_0| < \delta_1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$, illetve $|x - x_0| < \delta_2 \implies |g(x) - g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ezek után, a $h(x)$-hez tartozó környezet, $\delta := min(\delta_1, \delta_2)$ legyen. Így adódik, hogy ha $|x - x_0| < \delta$, akkor

   $$|h(x)-h(x_0)| = |f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)| \leq |f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

   tehát $h(x)$ is folytonos. (λ-val való szorzásra hasonlóképpen megy!)

   (b) Nem. Mert, ha $f(x)$ egy 5-szakadású függvény, és $g(x)$ is szakad egy másik helyen, akkor az összegük, $h(x)$ pontosan 6 helyen fog szakadni, tehát nem marad bent a részhalmazban.

   (c) Igen. (f(x) páros fv, ha: $f(x) = f(-x)$ minden x-re).
   Összeadásra: $h(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = h(-x)$
   Szorzásra: $\lambda f(x) = f(\lambda x) = f(-\lambda x) = \lambda f(-x)$

   (d) Igen. Mert polinomfüggvényeknél az összeadás, és a skalárral való szorzás megfelel az együtthatók összeadásának és skalárral való szorzásának.

   (e) Nem. Pl: a (-1)-el való szorzás kivezet a halmazból.

   (f) Igen. Összeadásra: $h(5) = f(5)+g(5) = f(8)+g(8) = h(8)$, szorzásra hasonlóképpen.

2. A feladat becsapós, ugyanis az eredeti halmaz sem vektortér, mert például nem létezik minden elemnek ellentettje.

3. $6\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c} \in W$, ugyanis $3(\underline{a}+\underline{b})+1(\underline{c}+3\underline{a}) = 6\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c}$, vagyis kifejezhető a két vektor lináris kombinációjaként, ezért ő is eleme a vektortérnek. Indirekt tegyük fel, hogy $5\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c} \in W$. Ekkor $(6\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c})-(5\underline{a}+3\underline{b}+\underline{c}) = \underline{a} \in W$ lenne. Ez viszont nem lehet, mert ekkor $1(\underline{a}+\underline{b})+2(\underline{c}+3\underline{a})-7(\underline{a}) = \underline{b} + 2\underline{c} \in W$ is teljesülne.

4. A kérdés tehát, hogy létezik-e olyan α és β a moduló 7 test felett, hogy $\alpha(2, 2, 5) + \beta(1, 4, 5) = (0, 2, 4)$? A megfelelő lineáris egyenletrendszer megoldásaként kapjuk, hogy $\alpha = 2$ és $\beta = 3$, tehát előáll a kulcsszó.

5. A feladat, tehát megfelelő bázis keresése. Egy-egy lehetséges megoldás:

   (a) Bázis: $[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]$. Dimenzió=3

   (b) Bármely n-edfokú polinomhoz hozzárendelhetjük azt az $n + 1$-hosszú vektort, amely a polinom együtthatóiból áll. (A polinomok szorzása és összeadása megfelel a hozzájuk tartozó vektorok összeadásával és szorzásával.) Bázis: $[1, 0, \ldots, 0], \ldots, [0, \ldots, 0, 1]$. Dimenzió=$n + 1$

   (c) Az itteni bázis n^2 elemből áll, ahol az (i, j)-edik elem legyen $A_{i,j}$ $n \times n$-es mátrix, ahol $a_{i,j} = 1$, és a többi helyen pedig csupa 0 áll. A vektortér dimenziója=n^2.

6. Indirekt módon tegyük fel, hogy nem függetlenek, tehát léteznek olyan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ nem csupa nulla skalárok, hogy $\alpha_1\underline{a}_1 + \alpha_2\underline{a}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{a}_k + \beta_1\underline{b}_1 + \beta_2\underline{b}_2 + \ldots \beta_l\underline{b}_l = \underline{a} + \underline{b} = 0$. Ekkor két eset lehetséges:
1) Ha $\underline{a} = \underline{b} = 0$, akkor vagy $\underline{a}_i - k$ vagy $\underline{b}_j$-k nem voltak függetlenek, hiszen előálltak nemtriviális lineáris kombinációként.
2) Ha viszont $\underline{a} = -\underline{b} \neq 0$, akkor a két generált altér nem volt diszjunkt, tehát ellentmondásra jutottunk.

7. Mindkét feladat megoldása indirekt módon megy:

   (a) Ha $\{\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}+\underline{c}$ és $\underline{b}+\underline{c}$ lineárisan összefüggők$\}$ $\Longleftrightarrow$ $\{$Létezik α, β, γ nem csupa nulla skalárok, hogy $\alpha(\underline{a}+\underline{b})+\beta(\underline{a}+\underline{c})+\gamma(\underline{b}+\underline{c}) = 0\}$ $\Longleftrightarrow$ $\{(\alpha+\beta)\underline{a}+(\alpha+\gamma)\underline{b}+(\beta+\gamma)\underline{c}=0\}$ $\Longleftrightarrow$ $\{\alpha+\beta = \alpha+\gamma = \beta+\gamma = 0\}$, (mert $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ függetlenek!) ez pedig a valós test felett akkor éa csakis akkor állhat fent, ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát ellentmondásra jutottunk.

   (b) Ha $\{\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan összefüggők$\}$ $\Longleftrightarrow$ $\{$Létezik α, β, γ nem csupa nulla skalárok, hogy $2(\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}+\gamma\underline{c}) = 0\}$ $\Longleftrightarrow$ $\{(\alpha+\beta-\gamma)(\underline{a}+\underline{b}) + (\alpha-\beta+\gamma)(\underline{a}+\underline{c}) + (-\alpha+\beta+\gamma)(\underline{b}+\underline{c}) = 0\}$ $\Longleftrightarrow$ $\{\alpha+\beta-\gamma = \alpha-\beta+\gamma = -\alpha+\beta+\gamma = 0\}$, (mert $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{a}+\underline{c}$ és $\underline{b}+\underline{c}$ lineárisan függetlenek!) ez pedig a valós test felett akkor és csakis akkor állhat fent, ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$, tehát ismét ellentmondásra jutottunk.