Bevezetés a számításelméletbe I.

Megoldások

3. gyakorlat: Lineáris egyenletrendszerek

1. Legyen Anna, Balázs és Cili életkora a, b és c. Ekkor: $\begin{aligned} a+b-c &= 11 \\ a-b+c &= 1 \\ -a+b+c &= 5 \end{aligned}$

   Gauss-eliminációval megoldva:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & -1 & 11 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & -2 & 2 & -10 \\ 0 & 2 & 0 & 16 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 0 & 14 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

   Tehát Anna 6, Balázs 8 és Cili 3 éves.

2. Gauss-eliminációval:

   (a) $x=1$, $y=-1$ és $z=2$, mert

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -3 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 10 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 10 & 10 & 10 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 9 & 14 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

   (b) Nincs megoldás, mert

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & \boxed{5} & 5 & 25 \\ 0 & 5 & 5 & 23 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

   (c) Végtelen sok megoldás: z tetszőleges, $y=5-z$, és $x=12-3z$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & -1 & -2 & -7 \\ 2 & 3 & 1 & 11 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & \boxed{5} & 5 & 25 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -2 & -7 \\ 0 & 5 & 5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

3. Gauss-eliminációval:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 9 & 2 & -5 & -3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & -4 & 1 & 6 & 3 \\ 3 & 5 & 6 & 6 & -9 & 8 \\ 0 & 8 & 0 & -6 & 0 & 8 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 9 & 2 & -5 & -3 & 9 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 18 & 0 & -9 & 0 & 21 \\ 0 & -22 & 0 & 21 & 0 & -19 \\ 0 & 8 & 0 & -6 & 0 & 8 \end{array}\right) \iff$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 9 & 2 & -5 & -3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & 0 & -12 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 9 & 2 & -5 & -3 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{18} & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 36 \end{array}\right) \iff$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 9 & 2 & -5 & -3 & 9 \\ 0 & \boxed{2} & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

   A megoldás: $y=\frac{3}{2}$, $u=\frac{2}{3}$, z és v tetszőleges, $x=3v-2z-\frac{7}{6}$

4. Az első sort levonva a másodikból, majd felcserélve őket adódik:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 2 & -8 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & -5 & 19 & 9 \\ 0 & -9 & 33 & 15 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -5 & -3 \\ 0 & -3 & 11 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -8 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

5. $t = 23$-ra, ugyanis

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & t & 11 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{-3} & 6 & -3 \\ 0 & -9 & t-5 & -9 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & t-23 & 0 \end{array}\right)$$

6. Gauss-eliminációval adódik:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 2 & -1 & t \\ 1 & -8 & 9 & 10 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & t \\ 0 & \boxed{-10} & 10 & 10-t \\ 0 & -5 & 5 & 6-2t \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & t \\ 0 & -10 & 10 & 10-t \\ 0 & 0 & 0 & 2-3t \end{array}\right)$$

Ha $t \neq \frac{2}{3}$, akkor nincs megoldás.
Ha $t = \frac{2}{3}$, akkor z lehet tetszőleges, $y = z - \frac{14}{15}$ és $x = \frac{38}{15} - z$.

7. A $3x+y-3z = 8$ egyenletű síkkal párhuzamos síkok egyenlete: $3x+y-3z = d$. Ezek közül, amelyik átmegy a $(3,4,5)$ ponton: $3 \cdot 3 + 4 - 3 \cdot 5 = -2 = d$ paraméterű.

8. Ha $d \neq 0$ akkor egy sík-egyenletet lenormálhatunk: $ax + by + cz = 1$ alakra. Az adott pontok rajta vannak a keresett síkon, ezért kielégítik az egyenletet. Az így kapott lineáris egyenletrendszert megoldva adódnak a keresett paraméterek:

$$\begin{array}{rcl} 11a - 7b - 4c & = & 1 \\ 5a + 8b - c & = & 1 \\ 2a + 9b + 13c & = & 1 \end{array}$$

9. A síkok pontosan akkor metszik egymást egy pontban, ha az egyenleteikből kapott lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 3 & p & 11 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -1 \\ 0 & -2 & p-5 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & p-1 & 3 \end{array}\right)$$

Ha $p \neq 1$, akkor az egyenletrendszernek 1 megoldása van, tehát a síkok 1 pontban metszik egymást.