Bevezetés a számításelméletbe I.
MEGOLDÁSOK
2. gyakorlat: Komplex számok

1. Legyen $z = 1 + \sqrt{3}i$ és $w = 2 - 2i$ két komplex szám.
   (a) Trigonometrikus alakjuk:
   $$z = 2(cos\frac{\Pi}{3} + isin\frac{\Pi}{3}) \text{ és } w = 2\sqrt{2}(cos(-\frac{\Pi}{4}) + isin(-\frac{\Pi}{4}))$$
   (b) Összegük, szorzatuk, hányadosuk:
   $$\mathbf{z}+\mathbf{w} = (1+\sqrt{3}i) + (2-2i) = 3 + (\sqrt{3}-1)i$$
   $$\mathbf{z}\cdot\mathbf{w} = 2\cdot 2\sqrt{2}(cos(\frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{4}) + isin(\frac{\Pi}{3} - \frac{\Pi}{4})) = 4\sqrt{2}(cos\frac{\Pi}{12} + isin\frac{\Pi}{12})$$
   $$\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{w}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}(cos(\frac{\Pi}{3} + \frac{\Pi}{4}) + isin(\frac{\Pi}{3} + \frac{\Pi}{4})) = 4\sqrt{2}(cos\frac{7\Pi}{12} + isin\frac{7\Pi}{12})$$
   (c) z konjugáltja: $\bar{\mathbf{z}} = 1 - \sqrt{3}i$
   z gyökei:
   $$\sqrt{z}_1 = \sqrt{2}(cos\frac{\Pi}{6} + isin\frac{\Pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}+i}{2} \text{ és } \sqrt{z}_2 = \sqrt{2}(cos\frac{7\Pi}{6} + isin\frac{7\Pi}{6}) = -\frac{\sqrt{6}+i}{2}$$
2. Az egyenletek megoldásai:
   (a) $z^2 + 3 = 0 \iff z^2 = -3 \iff \sqrt{z}_1 = \sqrt{3}i$ és $\sqrt{z}_2 = -\sqrt{3}i$
   (b) $z^2 - 1 - \sqrt{3}i = 0 \iff z^2 = 1 + \sqrt{3}i \iff$ 1/c feladat
   (c) A megoldóképlet szerint:
   $$z_{1,2} = \frac{4 + \sqrt{16-20}}{2} \iff z_1 = 2 + i \text{ és } z_2 = 2 - i$$
   (d) $a + bi + a - bi = 2\sqrt{a^2+b^2} \iff a^2 = a^2 + b^2 \iff b = 0$
   (e) $\bar{z} = z^{2003} \iff 1 = z\cdot\bar{z} = z^{2004} \iff z = \{$ 2004. egységgyökök$\}$
3. Ha $z = a + bi$, akkor
   (a) valós tengelyre tükrözve: $a - bi = \bar{z}$-t kapjuk,
   (b) képzetes tengelyre tükrözve: $-a + bi$-t kapjuk,
   (c) az $x = y$ egyenesre tükrözve: $b + ai$-t kapjuk.
4. Ha $z = a + bi$, akkor $w = c + di$ alakja a következő lesz, ha z és w
   (a) összege valós: $d = -b$
   (b) szorzata valós: szögeik összege $\Pi \iff |\frac{b}{a}| = |\frac{d}{c}|$,
   (c) négyzetösszege valós: $z^2 + w^2 = a^2 + b^2 + 2abi + c^2 + d^2 + 2cdi$ valós $\iff$ $ab = -cd$
5. $z = \sqrt{3} - i$ szöge $arg(z) = -\frac{\Pi}{6}$, ezért $arg(z^n) = -n\frac{\Pi}{6}$
   $$z^n \text{ valós } \iff -n\frac{\Pi}{6} = k\Pi \iff n = 6k\ \forall k \in \mathbb{Z}\text{-re}$$

6. $(a+bi)(1+i)-(a-bi)(1-i)=2(a+b)i=2i \iff a+b=1$

7.

$$\frac{3-i}{2-4i}=\frac{3-i}{2-4i}\frac{2+4i}{2+4i}=\frac{10+10i}{20}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}(cos\frac{\Pi}{4}+isin\frac{\Pi}{4})$$

$$\left(\frac{3-i}{2-4i}\right)^{2003}=\frac{1}{\sqrt{2}^{2003}}(cos\frac{2000+3}{4}\Pi+isin\frac{2000+3}{4}\Pi)=\frac{1}{\sqrt{2}^{2003}}(cos\frac{3}{4}\Pi+isin\frac{3}{4}\Pi)$$

8.

$$\frac{(-1+i)^{1998}}{(1+i)^{2000}}=\frac{\sqrt{2}^{1998}(cos(\frac{3}{4}\Pi\cdot 1998)+isin(\frac{3}{4}\Pi\cdot 1998)}{\sqrt{2}^{2000}(cos(\frac{\pi}{4}2000)+isin(\frac{\pi}{4}2000))}=\frac{\sqrt{2}^{1998}}{\sqrt{2}^{2000}}\frac{i}{1}=\frac{i}{2}$$

9. Ha $z^n=1$ és $w^k=1$ két egységgyök, akkor $m=n\cdot k$ esetén $z\cdot w$ m-edik egységgyök, ugyanis $(z\cdot w)^m=(z\cdot w)^n\cdot k=(z^n)^k\cdot(w^k)^n=1^k\cdot 1^n=1$. Két 1-hosszú vektor összege csak akkor lesz 1-hosszú, ha $\frac{2}{3}\Pi$ a bezárt szögük. Így két egységvektor összege is csak ebben az esetben lehet egységvektor, és $n=3k$-ra viszont ez tényleg teljesül, valóban lesznek olyan egységgyökök, amelyek ekkora szöget zárnak be egymással.

10. Legyenek $e_0,e_2,\ldots,e_{n-1}$ az n-edik egységgyökök. Ekkor

$$\prod_{i=0}^{n-1}e_i=\begin{cases}1 & \text{ha } n \text{ páratlan}\\ -1 & \text{ha } n \text{ páros}\end{cases}\quad \text{és} \quad \sum_{i=0}^{n-1}e_i=0$$

Ugyanis első esetben a tényezők párokba rendezhetők

$$\prod_{i=0}^{n-1}e_i=\begin{cases}e_0(e_1e_{n-1})(e_2e_{n-2})\ldots(e_{\frac{n-1}{2}}e_{\frac{n}{2}})=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1=1 & \text{ha } n \text{ páratlan}\\ e_0(e_1e_{n-1})(e_2e_{n-2})\ldots(e_{\frac{n-1}{2}}e_{\frac{n+1}{2}})e_{\frac{n}{2}}=1\cdot 1\cdot\ldots\cdot(-1)=-1 & \text{ha } n \text{ páros}\end{cases}$$

Mert e_i és e_{n-i} egymás konjugáltjai.

Az összeget megszorozva e_1-el önmagát kapjuk vissza:

$$e_1\sum_{i=0}^{n-1}e_i=\sum_{i=0}^{n-1}e_1e_i=\sum_{i=0}^{n-1}e_{i+1}=\sum_{i=0}^{n-1}e_i$$

a $z\cdot e_1=z$ egyenlet pedig csak $z=0$-ra teljesülhet.
(csak a null-vektor egyezik meg önmaga elforgatottjával, ha $\phi\neq 2\Pi$)

11. Az e_k 2000. egységgyök szöge:

$$arg(e_k)=k\frac{2\Pi}{2000} \text{ így } arg(e_k^{1000})=k\frac{2\Pi}{2000}1000=k\Pi$$

Ezért e_k akkor és csakis sakkor lesz 1000. egységgyök is, ha $k\Pi=2l\Pi$, vagyis, ha $k=2l$, tehát minden második egységgyök lesz ilyen (összesen 1000db).