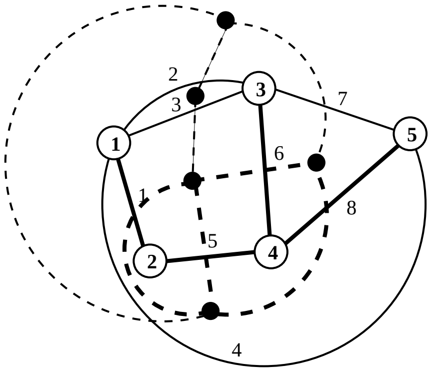
Bevezetés a számításelméletbe I.
MEGOLDÁS
14. gyakorlat: Dualitás, gráfreprezentációk

1. A gráf duálisa a következő:

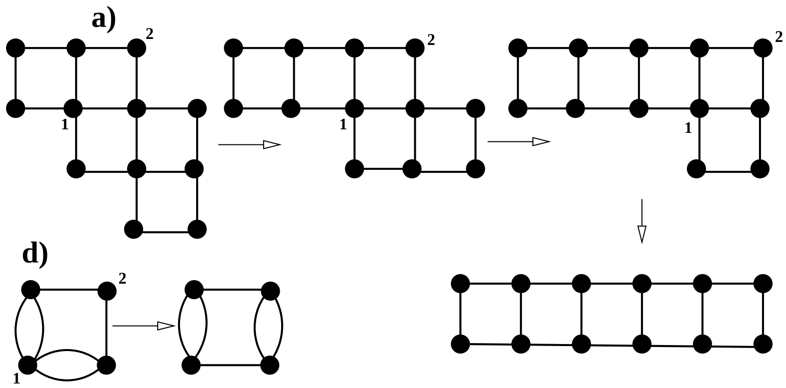


Az élek száma G^*-ben megegyezik a G-ben lévő tartományok számával (5), az élek száma pedig nem változik (8). Egy lehetséges feszítőfa van megvastagítva az ábrán. A nekik megfelelő éleket elhagyva G^*-ből szintén egy feszítőfát kapunk. A $2,4$ pontokat elvágó élek: 1,6,8. A duálisban a nekik megfelelő élek kört alkotnak.

2. Indirekt módon feltesszük, hogy minden küldött beválasztható a küldöttségbe. Ez azt jelentené, hogy egy síkbarajzolható gráf duálisában (ami szintén síkbarajzolható!) minden pont foka legalább 6. Ez viszont nem lehet, mert az élek számának kétszerese:

$$6n \leq \sum_{i \in V(G)} d(i) = 2e \leq 6(n-2)$$

3. Ha gyengén izomorfak, akkor Whitney tétele szerint eljutunk megengedett műveletekkel az egyik gráfból a másikba. Ha nem, akkor mutatunk például egy kört vagy egy vágást, ami nem szerepelhet a duálisban.



A b) esetben az alsó gráfban létezik egy 3 élből álló vágás, míg a felső gráfban nincs ilyen.
A c) esetben már az élek száma sem egyezik, és az egyikben van kör, a másikban nincs.

4. A szomszédossági és az illeszkedési mátrixok a következők:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az A^k mátrix i-edik sorában álló j-edik elem ($a_{ij}^{(k)}$) azt mutatja meg, hogy hány különböző k-hosszú séta van az i. és a j. csúcs között. Így az A^2 diagonálisában pont a csúcsok fokszámai jelennek meg. A^3 diagonálisában a csúcson áthaladó háromszögek 2-szerese mutatkozik meg, így ezek összege a gráfban található háromszögek számának 6-szorosát adja (hisz minden háromszöget pontosan 6-szor számoltunk).
B és B^T szorzata pontosan A mátrix lesz.