Bevezetés a számításelméletbe I.

MEGOLDÁSOK

13. gyakorlat: Síkgráfok

1. Az Euler-tétel szerint egy síkba-(vagy gömbre-)rajzolt gráfra teljesül, hogy $e + 2 = n + t$. A 3-regularistás azt jelenti, hogy a gráf minden pontjának foka 3. Így az élszámra adódik, hogy $2e = 3n$. Az Euler-tételbe behellyetesítve kapjuk, hogy $\frac{3n}{2} + 2 = n + 6$, amelyből $n = 8$ és $e = 12$.

2. Ha c_i jelöli az i-edik tartományt határoló élek számát, akkor az élekre nézve felírhatjuk az alábbi egyenlőtlenséget:

$$3t \leq c_1 + c_2 + \cdots + c_t = 2e$$

   Ugyanis minden tartományt legalább három él határol, és így minden élet pontosan kétszer számoltunk meg. Ebből következik, hogy $e \leq 3n - 6$. Ha viszont minden pont foka legalább 6 lenne, akkor $6n = \sum_{i \in V(G)} d(i) = 2e \leq 2(3n - 6)$ ellentmondás.

3. Esetünkben tehát $n = 20$ és $t = 12$. Az Euler-tételből adódik tehát, hogy $e + 2 = n + t = 32 \rightarrow e = 30$. Ha minden lapot k db él határol, akkor az élszámra teljesül, hogy $2e = k \cdot t$, amelyből megkapjuk, hogy $k = 5$, tehát a poliéder 5-csúcsú lapokból áll.

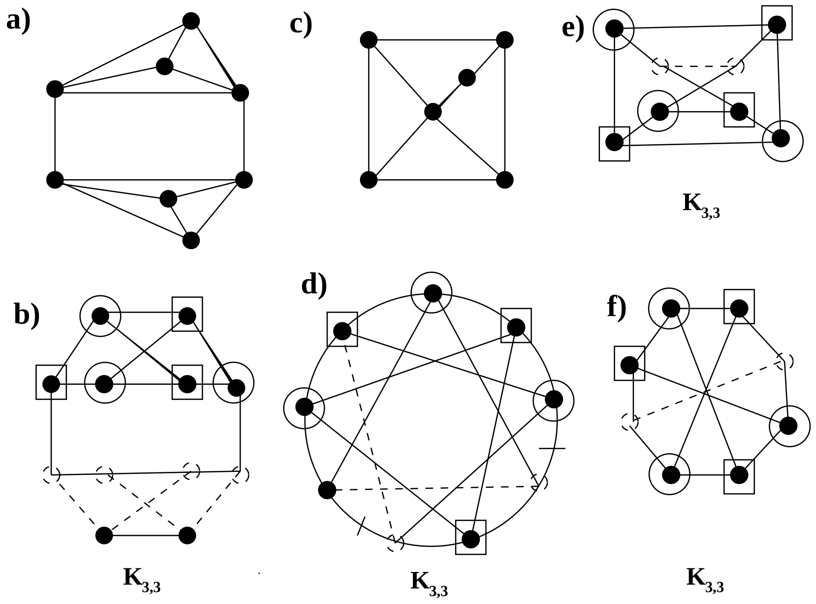
4. Ha tudjuk, hogy minden tartományt legalább k db él határol, akkor a 2. feladatban szereplő egyenlet a következőre módosul:

$$k \cdot t \leq c_1 + c_2 + \cdots + c_t = 2e \Longrightarrow e \leq \frac{k}{k-2}(n-2)$$

5. Tegyük fel, hogy a gráf síkbarajzolható. Páros gráfban nem lehet háromszög, ezért $k \geq 4$, így az előző egyenlőtlenségből $k = 4$-re $e \leq 2(n-2)$-t kapjuk. Egy 4-reguláris gráfban viszont az élszám $e = 4n/2 = 2n$ ellentmondás, a gráf nem lehet síkbarajzolható.

6. A gráfban mind az öt kút össze van kötve mind az öt házzal, ezért az élszám $e = 5 \cdot 5 = 25$. Az előző egyenlőtlenség most sem teljesül, hiszen páros gráf lévén $25 \leq 2(10 - 2)$ ellentmondás, tehát nem tudjuk lerajzolni a gráfot élkereszteződés nélkül. Vegyük azt a lerajzolást, amelyben a legkevesebb élkereszteződés van, és hagyjunk el egy olyan élet, amelyen volt kereszteződés. Az élszám tehát 1-el csökken, és fenti egyenlőtlenség megint sérül, tehát ismét találhatunk élkereszteződést... Csak a 9. él elvétele után lehet igaz az egyenlőtlenség, és mivel minden él-elhagyásnál legalább eggyel csökkentettük a kereszteződések számát, ezért az eredeti lerajzolásban legalább 9 kereszteződés kellett legyen.

7. A síkbarajzolható gráfokat lerajzoljuk élkereszteés nélkül, a többiben pedig találunk olyan részgráfot, amely topológikusan izomorf $K_{3,3}$-el, vagy K_5-el. (Vagyis él-elhagyásokkal és pont-összehúzással eljuthatunk a Kuratowski-gráfok valamelyikébe.) Ábra a túloldalon!



8. Igen. G gráf álljon egy teljes öt pontú gráfból és 4db izolált pontból. A $\bar{G}$ komplementerben az izolált pontok és az egyik pont a K_5-ből ismét teljes 5-pontú gráfot ad, hiszen egyik pont sem volt összehúzva G-ben. Mindkettőben van tehát K_5, ezért a Kuratowski-tétel szerint egyik sem lehet síkbarajzolható.

9. Nem, mert tartalmazza a K_5-öt, ugyanis az $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,5\}$, $\{1,6\}$ halmazoknak van közös eleme, a nekik megfelelő pontok tehát mind össze vannak kötve.

10. Ha összekötjük azon országok fővárosait, akik szomszédosak, akkor síkgráfot kell kapjunk, (mert feltettük, hogy le tudjuk rajzolni az országokat a térképre úgy, hogy két oszág határvonalában nincs megszakítás). Ebben viszont nem lehet K_5, tehát olyan öt ország sincsen, amelyből bármely kettő szomszédos volna.