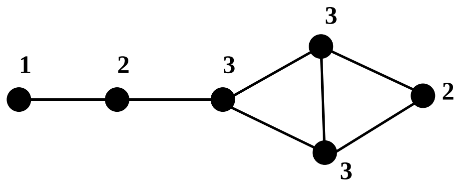
Bevezetés a számításelméletbe I.

MEGOLDÁSOK

12. gyakorlat: Gráfelmélet bevezető

1. A létezés bizonyításához mutatunk egy példát, a nem-létezés bizonyításához pedig keresünk egy feltételt, amit megsért.

   (a) Igen.

   (b) Nem, mert itt a fokszámok összege páratlan, és tudjuk, hogy minden gráfra teljesül, hogy

   $$\sum_{i \in V(G)} d(i) = 2e$$

2. Egy 4 pontú egyszerű gráfban legfeljebb 6 él lehet, (mert a teljes gráf élszáma: $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$). Így az adott gráfban pontosan 1 él nincs behúzva (a G gráf komplementerében, $\bar{G}$-ben pontosan 1 él van), és ez, ha eltekintünk az izomorfiától, pontosan egy esetet jelent.

3. Egy 60 pontú egyszerű gráfban legfeljebb $\frac{60 \cdot 59}{2} = 1770$ él lehet, vagyis az adott gráfban pontosan két él nincs behúzva (a komplementer-gráfban két él van). Ez az izomorfiától eltekintve két esetet jelent, ugyanis a kihagyott két élnek vagy van közös csúcsa vagy nincs.

4. Tegyük fel, hogy G nem összefüggő, és lássuk, be hogy ekkor $\bar{G}$ biztosan összefüggő lesz! Ha G nem összefüggő, akkor van legalább 2 komponense. Mutassuk meg, hogy $\bar{G}$ tetszőleges két pontja $i, j \in V(G)$ között létezik út. Ha i és j különböző komponensben volt a G-ben, akkor közöttük megy él a $\bar{G}$-ben. Ha viszont egy komponensben voltak, akkor találhatunk egy olyan k pontot, amelyik másik komponensben volt G-ben, és így i és j is össze van kötve vele $\bar{G}$-ben. Tehát vagy közvetlenül, vagy egy másik ponton keresztül, egy legfeljebb 2 hosszú úton el tudunk jutni i-ből j-be.

5. A fokszámokra vonatkozó tétel szerint egy fa esetében $\sum_{i \in V(G)} d(i) = 2e = 2(n-1)$. Ha egy egyszerű fáról beszélnénk, akkor a skatulya elv miatt lenne legalább 2 első fokú pontja, mert különben a fokszámok összege nagyobb lenne $2(n-1)$-nél. (2 db első fokú pontja pontosan akkor lehet, ha a többi pont foka 2.) Ha viszont van két 5-öd fokú pontunk, akkor a skatulya elv szerint legalább 8db első fokú pont kell legyen, mert egyébként a fokszámok összege ismét meghaladná a $2(n-1)$-et.

6. Mivel a fa összefüggő, ezért nem tartalmazhat izolált pontot, így a fokszámok csak $1, 2, 3, \ldots, n-1$ lehetnek, és ezeket az értékek mind szerepelniük is kell pontok fokszámaiként. Ha viszont van egy $n-1$ fokú pontunk (tehát egy olyan pont, aki minden ponttal össze van kötve a gráfban!) akkor a többi már csak első fokú lehet, mert ha bármelyik kettő között menne él, akkor az $(n-1)$-fokú ponttal együtt egy 3-hosszú kört alkotnának. Az adott tulajdonságú fa tehát csak $n = 1, 2, 3$ pontszámra állhat elő, mert például $n > 3$-ra 2-fokú csúcs nem lehet benne.

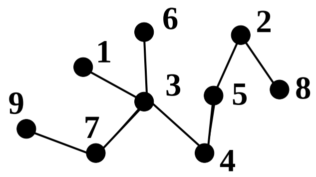
7. Az fog veszíteni, aki az n-edik lépésben következik, mert az $n-1$-edik lépésig a gráf még nem lehet összefüggő, ezért a komponensek között mindig tudunk élet behúzni. Az $n-1$-edik lépés után tehát szükségképpen egy fát kapunk, és az n-edik él behúzásával már biztosan előáll egy kör.

8. A Prüfer-kód és a fa a következő:

   a) Kód:

   [4,4,6,8,8,9,9]

   b) Fa:

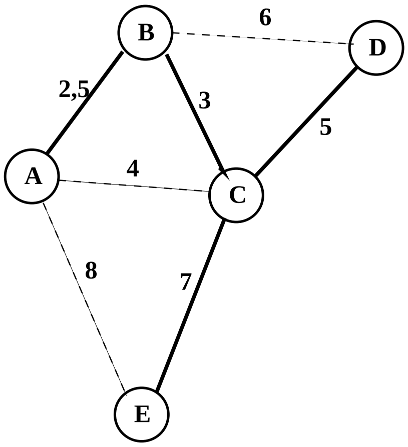
   

9. Az élszámból adódik, hogy a két n-pontú összefüggő részen egy-egy fa kell legyen. A ponthalmazt két egyenlő részre pontosan $2n$ alatt az n-féleképp bonthatjuk. Ezután a két n-pontú részen egyenként n^{n-2}-féle fát tudunk konstruálni (Cayley-tétel). A megoldás tehát:

   $$\binom{2n}{n} \cdot n^{n-2} \cdot n^{n-2}$$

10. A megoldást a mohó algoritmussal kapjuk, vagyis mindig a lehető legolcsóbb utat építjük

meg, feltéve, hogy az út megépítésével nem kapunk kört. Így a megfelelő gráf egy minimális súlyú feszítő fájához jutunk.



11. Mindkét esetben megnézzük, hogy milyen megoldáshoz vezethet a mohó algoritmus.
    (a) A minimális súlyú feszítőfa csak 1 súlyú élekből fog állni, és pontosan kettőt kell kihagynunk ezekből az élekből, úgy, hogy a gráf összefüggő maradjon. Ha a behúzott élek közt nem szerepel a középső él, akkor a maradék 6-hosszú körből pontosan 1 élet kell elhagynunk. Ha a középső élet is behúzzuk, akkor a fenti három élből, és a lenti 3 élből is pontosan egyet-egyet kell elhagynunk. Összesen tehát $6 + 3 \cdot 3 = 15$ féleképp tudunk minimális súlyú feszítőfát kiválasztani.
    (b) A Petersen-gráf legolcsóbb, - a gráf külső körét alkotó - éleiből pontosan 4-et tudunk behúzni, a belső csillagot alkotó 5 élből szintén csak négyet, végül az utólsó él az egyik 3-súlyú él kell legyen a küllők közül. 5-ből 4-et, vagy 1-et 5-féleképp tudunk kiválasztani, ezért adódik, hogy összesen $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ féleképp tudunk konstruálni minimális súlyú feszítőfát.

12. A mohó algoritmusunk először az A és a B halmazban talál két 1-súlyú feszítőfát, végül a két részt köti össze egy 2-súlyú éllel (az összesen n^2 darab A és B között futó élből). A megoldás tehát:
$$n^{n-2} \cdot n^{n-2} \cdot n^2 = n^{2n-2}$$