Bevezetés a számításelméletbe I.
MEGOLDÁSOK
10. gyakorlat: Számosságok

A feladatok megoldásához igen sokszor fel fogjuk használni az alábbi tételt:
$A \subseteq X \subseteq B$ és $|A| = |B| \Longrightarrow |X| = |A| = |B|$
Jelölje továbbá ω a megszámlálható, illetve c a kontinuum számosságot. Fontos példák ezekre: $\omega = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}|$ és $c = |[0,1]| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$

1. Ha X az adott halmaz, akkor ennek számossága:
   (a) $\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{N}^k$ és $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^k| = \omega \Longrightarrow |X| = \omega$ (lásd 8/a)
   (b) X az $\mathbb{N}$ hatványhalmaza: $X = P(\mathbb{X})$ ezért az általánosított kontinuum-hipotézisből ($|Y| < |P(Y)|$ és nincs köztes számosság!) adódik, hogy $\omega = |\mathbb{N}| < |P(\mathbb{N})| = |X| = c$
   (c) Egy sorozat itt egyértelműen leírható (a sorozat elemeinek hányadosaként kapott) 1/2 illetve 2 elemeket tartalmazó megszámlálhatóan végtelen sorozattal. Ebből adódóan a halmaz elemszáma: $|X| = |(1/2, 2)^\omega| = |2^\omega| = c$ (lásd 8/b feladat)
   (d) Az y elemek előfordulási helyei a sorozatban pontosan a természetes számok véges részhalmazainak felel meg. Így 1/a-ból adódik, hogy $|X| = \omega^k = \omega$
   (e) Az $n \times n$-es egész elemű mátrixok egyértelműen leírhatók n^2 db, vagyis véges sok egész számmal, ezért $|X| = |Z^{n^2}| = w^{n^2} = w$.
   (f) Ezen háromszögek minden csúcsa leírható két egész számmal (koordináták), így egy háromszög egyértelműen leírható 6 egész számmal. Ezért $\mathbb{Z}^2 \subseteq X \subseteq \mathbb{Z}^6$ és $|\mathbb{Z}^2| = |\mathbb{Z}^6| = \omega \Longrightarrow |X| = \omega$
   (g) Ha a háromszög két csúcsát rögzítjük a $A = (0,0)$ illetve $B = (0,1)$ pontokban, akkor $C = (2,a)$ esetén bármely a valós értékre a háromszög területe 1 lesz (vagyis egész!). A háromszög csúcsai pedig egyértelműen leírhatók 6 db valós számmal. Így:
   $\mathbb{R} \backsim (0,0,0,1,2,a) \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^6$ és $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^6| = c \Longrightarrow |X| = c$
   (h) Egy háromszög belső pontjai minimálisan tartalmaznak egy szakaszt (ami könnyen megfeleltethető a [0,1] szakasznak), és triviálisan benne van az egész valós síkban, ezért:
   $[a,b] \subseteq X \subseteq \mathbb{R}^2$ és $|[a,b]| = |[0,1]| = |\mathbb{R}^2| = c \Longrightarrow |X| = c$
   (i) $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \omega$, így a 8/b alapján $|\mathbb{Q}^\mathbb{N}| = \omega^\omega = c$.
   (j) A természetes számok összes permutációja szürjektíven leképezhető a végtelen hosszú $(0,1)$ sorozatok halmazára. (Ez azt jelenti, hogy minden $(0,1)$ sorozat előáll képként.) A leképezés legyen a következő: a sorozat k-adik helyére írjunk 1-et, ha a permutáció helyben hagyta azt az elemet, és legyen 0, ha elmozdította. A permutációk pedig leírhatók végtelen hosszú, természetes számokból álló sorozatokkal. Így 8/b alapján: $2^\mathbb{N} \subseteq X \subseteq \mathbb{N}^\mathbb{N}$ és $2^\omega = \omega^\omega = c \Longrightarrow |X| = c$
   (k) Minden valós függvényhez rendeljük hozzá azt a valós halmazt, melyen a függvény értéke növekszik. Ezzel a leképezéssel a valós halmaz összes részhalmaza ($2^\mathbb{R}$) előáll képként. A valós függvények grafikonja pedig része a valós számsíknak ($\mathbb{R}^2$). E két állításból, a 8/c feladat segítségével adódik, hogy:
   $2^\mathbb{R} \subseteq X \subseteq P(\mathbb{R}^2)$ és $|2^\mathbb{R}| = |P(\mathbb{R}^2)| = |P(\mathbb{R})| = c^c \Longrightarrow |X| = c^c$
2. A komplex egységkörön lévő számokra ez bizonyosan teljesül, hiszen egy ilyen számot szorozva a konjugáltjával 1-et kapunk. Az egységkör triviálisan megfeleltethető például a $[0,1]$ szakasznak, és felülről becsülhetjük az X halmaz számosságát a komplex számsík számosságával.
   $\{|z| = 1\} \subseteq X \subseteq \mathbb{C}$ és $|\{|z| = 1\}| = |[0,1]| = |\mathbb{C}| = c \Longrightarrow |X| = c$

3. Minden $a+b\sqrt{k}$ alakú szám egyértelműen felírható egy $(a,b,k)\in(\mathbb{Q}^2,Z)$ számhármassal. Mivel mindhárom koordináta ω számosságú, ezért
$\mathbb{Z}\subseteq X\subseteq(\mathbb{Q}^2,Z)$ és $|\mathbb{Z}|=|(\mathbb{Q}^2,Z)|=|\mathbb{Z}^5|=\omega\Longrightarrow|X|=\omega$

4. Minden ilyen négyzet egyértelműen felírható $(x,y,a)\in(\mathbb{Z}^2,R)$ alakban, ahol (x,y) a bal-alsó csúcs koordinátáját jelöli, a pedig a négyzet oldalhosszúságát. Ha a csúcsot rögzítjük, akkor a még szabadon választható, így a számhármas számosságát a legnagyobb számosságú, vagyis a valós koordináta határozza meg:
$\mathbb{R}\backsim(0,0,a)\subseteq X\subseteq(x,y,a)\subseteq\mathbb{R}^3$ és $|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}^3|=c\Longrightarrow|X|=c$

5. Ha az intervallumok helyett, ezek racionális végpontjait tekintjük, akkor láthatjuk, hogy valójában X a racionális számok két elemű részhalmazait jelöli, ezért az 1/a-ból közvetlenül következik, hogy: $|X|=|\mathbb{Q}^2|=|\mathbb{Q}|=\omega$

6. Minden sorozathoz egyértelműen hozzá tudunk rendelni egy végtelen hosszú $(0,1)$ sorozatot, (attól függően írunk 0-t, illetve 1-et, hogy a sorozat nő, vagy csökken az adott lépésben.) Ebből tehát a 8/b alapján következik, hogy $|X|=|2^{\mathbb{N}}|=c$.

7. Az X halmaz tehát most a racionális számok n-edik gyökeinek halmaza. Minden ilyen számot egyértelműen leírhatunk egy $(q,n)\in(\mathbb{Q},\mathbb{N})$ számpárral, tehát $\mathbb{Q}\subseteq X\subseteq(\mathbb{Q},\mathbb{N})$, ezért $|X|=|(\mathbb{Q},\mathbb{N})|=w$.

8. Lássuk be tehát ezen általános formulákat!

   (a) Az $\omega=\omega^2$ és $c=c^2$ állítások bizonyítása szerepelt az előadáson, (a szállodás példán keresztül, illetve az egységnégyzet egységszakazra történő leképezésével lett bizonyítva!) Nagyobb k-ra a bizonyítás indukcióval történik, melynek lépései megegyeznek a fenti bizonyításokkal.

   (b) $P(X)=2^X$, ezért 2^ω egy ω számosságú halmaz hatványhalmazának számosságát jelöli. A $2^\omega=c$ állítás tehát a kontinuum-hipotézis közvetlen következménye, de a Cantor-féle átlós módszerrel közvetlenül is be lett látva az előadáson. Az egyenlőségek igazolásához a triviális tartalmazások miatt mindössze azt kell belátnunk, hogy $c^\omega=c$.
   Lássuk be tehát, hogy például $[0,1]^{\mathbb{N}}$-et kölcsönösen egyértelműen le tudjuk képezni a $[0,1]$ szakaszba. $[0,1]^{\mathbb{N}}$ minden eleme megfelel egy $0\le a_i\le 1, i=1,\ldots,\infty$ valós azámokból álló végtelen hosszú sorozatnak. Az $[a]$ sorozat i-edik tagjának k-adik számjegyét a tizedestört alakban jelölje $a_i(k)$. Ekkor az $[a]$ sorozathoz rendeljünk hozzá egy $b\in[0,1]$ elemet (melynek l-edik számjegye a tizedestört alakban $b(l)$) a következőképpen: $b(1):=a_1(1), b(2):=a_2(1), b(3):=a_2(2), b(4):=a_1(2), b(5):=a_3(1),\ldots$ (tehát a szállodás feladatban megismert bejárás szerint!). A leképezés kölcsönösen egyértelmű: minden sorozathoz pontosan egy valós szám tartozik, és minden valós szám visszafejthető egy valós sorozattá.

   (c) A 2^c halmaz egy c számosságú halmaz halványhalmazának számosságát jelenti. Megmutatjuk, hogy c^c számosság sem több ennél. Tekintsük a valós számok halmazát. Itt $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ halmaz megegyezik az $\{f|f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ valós függvények halmazával. Ez a halmaz viszont része a valós számsík részhalmazainak, tehát $P(R^2)$-nek. Összefoglalva:
   $P(\mathbb{R})=2^{\mathbb{R}}\subseteq\mathbb{R}^{\mathbb{R}}=\{f|f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}\subseteq P(\mathbb{R}^2)$
   és $|P(\mathbb{R})|=|P(\mathbb{R}^2)|$, mert $|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}^2|\Longrightarrow|2^{\mathbb{R}}|=|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}|$

9. Ha $|C|=|A\setminus B|<|A|$ volna, akkor ez azt jelentené, hogy két halmaz számossága, kevesebb, mint az uniójuk számossága (ugyanis $A\subseteq C\cup B$, de $|C|<|A|$ és $|B|<|A|$). Ez végtelen halmazoknál nem lehetséges, mert ha a nagyobbik halmazt megduplázzuk, akkor sem lesz nagyobb elemszámú, hiszen még a véges hatványa sem lenne nagyobb elemszámú.