Bevezetés a számításelméletbe I.
MEGOLDÁSOK
1. gyakorlat: Vegyes feladatok

1. Minden figura esetén mutatni kell egy maximális lerakást, és azt is meg kell indokolni, hogy miért nem lehet többet letenni.
   Ló: 32db: Minden fekete mezőre rakjunk egy lovat.
   maximális: Párba tudjuk úgy állítani a mezőket, hogy lóugrásnyi távolságra legyen minden pár egymástól. Pl:$A1-C2, A2-C1, \ldots$ Minden pár közül legfeljebb csak az egyiken lehet ló.
   Futó: 14db: Az alsó sorba, és a sarkokat kivéve a felső sorba tegyük a futókat.
   maximális: Vegyük sorra a bal-alsó–jobb-felső átlókat, ebből 15 db van. Mindegyik átlón legfeljebb egy futó lehet, és a két sarokpont (1 hosszú átló) egyikén lehet csak futó.
   Bástya: 8db. Legyenek a bástyák az egyik nagyátlón.
   maximális: Egy sorban legfeljebb egy bástya lehet.
   Vezér: 8db. Pl: $A7, B3, C1, D6, E8, F5, G2, H4$.
   maximális: Egy sorban legfeljebb egy vezér lehet.

2. Ugyanannyi. Mind a két pohárban ugyanannyi folyadék van, ezért ha a vízben x bor van, akkor pont ennyi bor hiányzik a másik pohárból, tehát ennyi víz van a borban.

3. Egy n emeletes várhoz $2n+\frac{3n(n-1)}{2}$ lap kell. (Felülről lefelé minden szintre 3-mal több lap kell...) Így egy magyar-kártya pakliból 4 teljes emelet jön ki.

4. A legjobbhoz $n-1$ mérkőzésre. Ennyi elég, mert pl: mindig a nyertes jut tovább, ennél kevesebb pedig nem elég, mert akkor lenne legalább két olyan csoport, akik közül senki sem játszott a másik csoportból senkivel. Ha a legjobbat és a legrosszabbat is meg akarjuk mondani, akkor megtehetjük azt, hogy először párokba rendezzük a játékosokat (ez $n/2$ mérkőzés), és ezután csak a győztesek közül választjuk ki a a legjobbat, és csak a vesztesek közül a legrosszabbat (ez $2*(\frac{n}{2}-1)$ mérkőzést jelent).

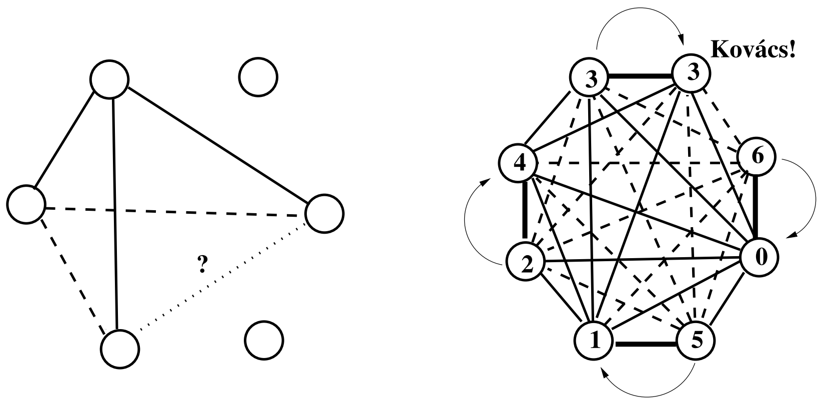
5. Legalább 12-t, hiszen, ha mind a hét pontot szerző játékos 11 pontot szerezne, még maradna 1 pont, amit nem osztottunk ki. (Ezt az érvelést nevezzük *Skatulya-elv*-nek.)

6. Mindig a legrosszabb esetet nézve:
   (a) 63-at. (Először kivesszük az összes zöldet...)
   (b) 95-öt. (Kivesszük az összes zöldet, sárgát, és a 3 pirosat...)
   (c) 4-et. (A skatulya-elv miatt)

7. Vegyük az egyik embert. Ő legalább 3 embert vagy utál, vagy szeret. (Tegyük fel, hogy szeret.) Ha ez a három ember mind utálja egymást, akkor kész vagyunk; ha pedig bármelyik kettő szereti egymást, akkor az első emberrel már hárman szeretik egymást kölcsönösen. (Gráfon rajzolva lásd a lenti ábrát!)

8. 3-at ismer. Először is észre kell venni, hogy a válaszok 0,1,2,3,4,5,6 voltak, hiszen a házastársának senki sem mutatkozik be. Ekkor egy tetszőlegesen kiválasztott emberről tegyük fel, hogy 6-ot válaszolt, vagyis a feleségén kívül mindenkinek bemutatkozott. Ebben az esetben a felesége 0-t kellett, hogy válaszoljon, hiszen rajta kívül nem lehetett senki, aki mindenkit

ismert, hiszen a férjének bemutatkozott! A következő 5-öt válaszoló férj feleségének hasonló okokból 1-et kellet válaszolnia, a 4-nek 2-t, és végül a 3-at válaszoló házastársának 3-at. A kérdező tehát 3-at kellett, hogy ismerjen. (A szemléletes bizonyításhoz ismét használjunk gráfot: a pontok az embereket jelöljék, és két ember legyen összekötve, ha ismerték egymást:)



1. ábra. 7-es, 8-as feladat gráfokon ábrázolva

9. Lehetséges! Pl: 11m-t a következőképpen haladhatott: A teknős béka, levelei-békaként ugorjon minden $k(\frac{1}{2}+\epsilon)$ percben 1m-t ($k = 1, 2, \ldots, 11$). Így összesen 11 métert halad előre, és minden második ugrás között $1 + 2\epsilon$ perc van, tehát be tudunk rakni mindig egy megfigyelőt úgy, hogy csak a középső ugrást lássa, az elsőt és a harmadikat ne.

10. Adjunk minden őrnek a kezébe egy kártyát a legelején, és tegyük fel, hogy ha találkoznak az őrök, akkor kicserélik a náluk lévő kártyákat, és utána fordulnak meg és folytatják útjukat. Így a kártyák egyenletes sebességgel fognak körbemenni, tehát minden kártya minden egész órában visszatér az eredeti helyére. Minden kártya pontosan annyiszor cserél gazdát, ahány kártya "jön szembe" vele, például k-szor. Így 12 óra alatt összesen $12 * k$-szor, vagyis a kártya éjfélre visszajut az eredeti gazdájához. Összegezve: minden kártya az eredeti gazdájának kezében lesz éjfélkor az eredeti helyen.