Bevezetés a számításelméletbe I.

2006. OKTÓBER 24-25.

7. gyakorlat: Lineáris leképezések

1. Mi a magtere, képtere a szokásos háromdimenziós tér alábbi lineáris transzformációinak? Mik a leképezésekhez tartozó mátrixok?
   (a) Az identitás transzformáció
   (b) A zérus transzformáció
   (c) Az x-tengelyre való vetítés
   (d) Az $y - z$ síkra való vetítés

2. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok a sík vektorterén?
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}cos\phi & -sin\phi\\ sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}$$

3. Lássuk be a következőket:
   (a) $\begin{pmatrix}cos\phi & -sin\phi\\ sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}cosk\phi & -sink\phi\\ sink\phi & cosk\phi\end{pmatrix}$
   (b) $\{x$-tengelyre tükrüzés$\} \times \{y$-tengelyre tükrözés$\} = \{$középpontos tükrözés$\}$

4. Mi a magtere és képtere az alábbi leképezésnek: $f \to f(1)$, ahol a valós függvények teréből a valósok terére képezünk.

5. A legfeljebb 5-ödfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak R felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy Φ lineáris transzformációja. Írjuk fel Φ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban.

6. Igazoljuk, hogy bármely A lineáris leképezés esetén tetszőleges $\underline{u}$, $\underline{v}$ vektorokra $A(\underline{u}) = A(\underline{v})$ akkor és csak akkor igaz, ha $\underline{u} - \underline{v} \in KerA$.

7. Tudjuk, hogy egy A lineáris transzformáció magtere csak a nullvektorokból áll. Igazoljuk az alábbi állításokat:
   (a) Tetszőleges nemnulla vektor képe nem nullvektor.
   (b) Bármely két vektor képe különböző.
   (c) A képtér dimenziója megegyezik a kiindulási vektortér dimenziójával.

8. Legyen A mátrix által a V vektortéren megvalósított lineáris transzformáció olyan, hogy $KerA$ tartalmazza ImA-t. Mutassuk meg, hogy ekkor $A^2 = 0$.

9. **ZH!** Legyen V egy 37 dimenziós lineáris tér és $\mathcal{A} : V \to V$ lineáris leképezés. Jelölje $\mathcal{A}^2$ azt a lineáris leképezést, amit $\forall\underline{v} : \mathcal{A}^2 = \mathcal{A}(\mathcal{A}(\underline{v}))$ definiál. Tegyük fel, hogy $\dim Im\mathcal{A}^2 = 7$. Mennyi ezen feltétel mellett $\dim Ker\mathcal{A}$ lehetséges legkisebb értéke?