Bevezetés a számításelméletbe I.

2006. OKTÓBER 17-18.

6. gyakorlat: Mátrixok rangja, inverze

1. **ZH!** Mennyi a rangja az alábbi mátrixoknak?

   a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. **ZH!** Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját c paraméter függvényében.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & c \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   (a) Egy mátrix egy elemét megváltoztatva a rang legfeljebb 1-el változik.

   (b) Bármelyik mátrixban van olyan elem, amelyet alkalmasan módosítva a mátrix rangja megváltozik.

   (c) Ha az A mátrix oszlopai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható.

   (d) Ha az A mátrix sorai lineárisan függetlenek, akkor az $A\underline{x} = \underline{b}$ egyenletrendszer megoldható.

4. **ZH!** Az $n \times n$-es A és B mátrixokra teljesül, hogy $AB = A$ és $BA = B$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $A^2 = A$ és $B^2 = B$.

5. **ZH!** Legyen A egy $n \times n$-es invertálható mátrix, B pedig egy olyan $n \times n$-es mátrix, amelyre $AB = 0$ (csupa 0 mátrix). Igazoljuk, hogy ekkor $B = 0$.

6. Számítsuk ki az alábbi mátrixok inverzeit, amennyiben léteznek!

   a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

7. **ZH!** Adjuk meg az alábbi mátrix inverzét!
   Oldjuk meg $n \times n$-es mátrixra is!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. **ZH!** Határozzuk meg az alábbi mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beadható

6./1) Döntsük el, hogy vektorteret alkotnak-e az invertálható (3×3)-as, valós elemű mátrixok a szokásos mátrixösszeadásra és skalárral vett szorzásra nézve!

6./2) Hány dimenziós vektorteret generálnak a legfeljebb 5-ödfokú polinomok vektorterében a $p(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 1$, a $q(x) = 2x^5 + 6x^3 + 4$ és az $r(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 - 9x^2 - 1$ polinomok?