Bevezetés a számításelméletbe I.
2006. OKTÓBER 10-11.
5. gyakorlat: Determinánsok II.

1. **ZH!** Mennyi az $n \times n$-es $A = (a_{i,j})$ mátrix determinánsa, ha
$a_{i,j} = \begin{cases} (i-j+1)^2 & \text{ha } i \geq j, \\ 0 & \text{ha } i < j \end{cases}$

2. **ZH!** Legyenek $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ legfeljebb $(n-2)$-edfokú polinomok, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pedig valós számok. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi determináns értéke mindenképpen nulla.

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \ldots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \ldots & f_2(a_n) \\ \ldots & & & \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \ldots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

3. Anti, Balázs és Csaba egy gyárban dolgozik, ugyanolyan gépeken. Tudjuk, hogy Csaba 3 óra alatt készít annyi csavart, mint Anti és Béla 1-1 óra alatt összesen. Balázs 4 óra alatt készít annyit, mint Anti 2 óra és Csaba 3 óra alatt összesen. Végül egyik nap Balázs 9 órát dolgozott, és pontosan annyi csavarral lett kész, mint Anti 3 óra és Csaba 9 óra alatt együttesen. Ki lehet-e számolni ebből, hogy hány csavart tudnak elkészíteni óránként külön-külön? (Vizsgáljuk a homogén lineáris egyenletrendszer determinánsát!)

4. Írjuk fel annak a síknak az egyenletét, amely áthalad a $(0, 4, 6), (1, 5, 7)$ és $(2, 4, 6)$ pontokon.

Beadható

5./1) Jelölje S_n az $1, 2, \ldots, n$ számok permutációinak halmazát. Legyen $J(\sigma)$ azon párok száma, melyek nem állnak inverzióban a $\sigma \in S_n$ permutációban. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $\sigma \in S_n$ permutációhoz létezik olyan $\sigma' \in S_n$ permutáció, melyre $I(\sigma') = J(\sigma)$.

5./2) Legyen π az $1, 2, \ldots, 2003$ számok egy permutációja, és jelölje π' ennek megfordítását. (Tehát a π szerint az i-edik helyen álló elem azonos a π' szerint a $(2003 - i + 1)$-edik helyen álló elemmel.) Igaz-e tetszőleges π permutáció esetén, hogy a π és π' inverziószáma különböző paritású?