Bevezetés a számításelméletbe I.
2006. október 3-4.
4. gyakorlat: Determinánsok

1. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát!

   a) $\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi \\ sin\phi & cos\phi \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 123456 & 123426 \\ 123457 & 123427 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1111 & 111 & 11 \\ 11111 & 1111 & 111 \\ 12345 & 1234 & 123 \end{pmatrix}$

2. **ZH!** Állapítsuk meg, hogy n-től függően mi lesz egy $n\times n$-es mátrix determinánsának felírásában a mellékátlóban álló elemek szorzatának előjele.

3. **ZH!** Az $1, 2, \ldots, n$ számok tetszőleges σ permutációjához rendeljük hozzá a $J(\sigma)$ számot, ami a $\sigma(1)\sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ sorozatban azon elempárok száma, melyek nem állnak inverzióban egymással, és legyen $I(\sigma)$ a σ az inverziók száma. Mely n-ekre létezik olyan σ permutáció, hogy $I(\sigma) = J(\sigma)$?

4. **ZH!** Hogyan változik meg egy $n \times n$-es valós elemű mátrix determinánsa, ha minden elemét az ellentetjére cseréljük?

5. **ZH!** Lehet-e 0 az alábbi determinánsok értéke? Az első milyen n-re?

   a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n+1 & n+2 & \ldots & 2n \\ \ldots & & & \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & \ldots & n^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 111 & 100 & 225 & 235 \\ 220 & 312 & 220 & 410 \\ 215 & 180 & 268 & 305 \\ 315 & 145 & 205 & 122 \end{vmatrix}$

6. **ZH!** Döntsük el, hogy igazak-e az alábbi állítások. Ha A egy négyzetes mátrix, melynek minden eleme egész,
   (a) továbbá főátlójának minden eleme 4-el osztható, akkor det A is 4-el osztható.
   (b) továbbá első sorának minden eleme 4-el osztható, akkor det A is 4-el osztható.
   (c) továbbá első és utolsó sorának minden eleme páros, akkor det A 4-el osztható.
   (d) továbbá első sorának és utolsó oszlopának minden eleme páros, akkor det A 4-el osztható.

7. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   (a) Ha egy $n \times n$-es mátrixnak legalább $n^2 - n + 1$ eleme 0, akkor a mátrix determinánsa 0.
   (b) Ha egy mátrix determinánsa 0, akkor a mátrixban előfordul a 0 elem.
   (c) Ha egy $n \times n$-es mátrixban van egy $k \times l$-es csupa 0 téglalap, és $k + l > n$, akkor a mátrix determinánsa 0.
   (d) Bármelyik 100×100-as mátrixban mindig van olyan elem, amely megváltoztatásával elérhetjük, hogy a determináns értéke 0 legyen.

8. **ZH!** Legyen A egy $n\times n$-es mátrix, és jelöljük a i-edik sorának j-edik elemét $a_{i,j}$-vel. Legyen B olyan $n\times n$-es mátrix, hogy $b_{i,j} := \frac{i}{j}a_{i,j}$ minden $1 \leq i, j \leq n$-re. Mennyi B determinánsa, ha tudjuk, hogy $det(A) = 1$?

9. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es determinánsokat!

   a) $a_{i,j} = \begin{cases} i & \text{ha } i = j, \\ 1 & \text{ha } i \neq j \end{cases}$ b) $a_{i,j} = min(i, j)$ c) $a_{i,j} = i + j$

10. **ZH!** Igazoljuk, hogy ha az $n \times n$-es A mátrixnak minden eleme $+1$ vagy -1, akkor $det(A)$ osztható 2^{n-1}-el.

Beadható

4./1) Határozzuk meg a következő determináns 10-es számrendszerben felírt alakjának utolsó számjegyét!

$$\begin{vmatrix} 20 & 40 & 10 & 70 & 40 & 23 \\ 30 & 0 & 50 & 60 & 11 & 30 \\ 20 & 40 & 10 & 77 & 40 & 20 \\ 40 & 40 & 99 & 30 & 30 & 30 \\ 40 & 45 & 40 & 40 & 40 & 40 \\ 11 & 30 & 30 & 30 & 30 & 50 \end{vmatrix}$$

4./2) Az alábbi determinánsban a, b, c és d valós számokat jelölnek. Adjuk meg a determináns értékét!

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & a+d \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$