DIPLOMAMUNKA

Biró Péter

BUDAPESTI CORVINUS EGYETEM
KÖZGAZDASÁGTUDOMÁNYI KAR
VILÁGGAZDASÁGI TANSZÉK
EURÓPA FŐSZAKIRÁNY

STABIL PÁROSÍTÁSOK GAZDASÁGI ALKALMAZÁSAI

Készítette: Biró Péter
Témavezető: Dr. Magas István
Külső konzulens: Dr. Solymosi Tamás
Budapest, 2006

Bevezetés

Piaci modellekben a stabilitás feltétele lehet, hogy ne legyenek olyan szereplők akiknek kölcsönösen érdekükben áll és lehetőségük is van egy új partnerkapcsolatot létrehozni, felbontva esetleg ezzel más együttműködéseket. Az ilyen új blokkoló társulások létrejötte természetes jelenség a gazdaságban és egyéb társadalmi kapcsolatokban. A kooperációk létrejöttét, és a piac dinamikáját azonban lehetséges és sok esetben társadalmilag hasznos szabályozni. Sőt, egyre több példa mutatja, hogy stabil – minden szereplő által elfogadható – egyensúly létrehozható közvetlenül is, központilag vezérelt mechanizmusok által.

A legfontosabb és világszerte széles körben alkalmazott párosító rendszerek első leírása Gale és Shapley nevéhez fűződik. 1962-ben megjelent cikkükben [27] egy egyetemi felvételi mechanizmust írtak le, amely stabil kiosztást eredményez. Ezt az algoritmust alkalmazzák hazánkban is a felvételi pontszámok meghatározásakor. Meglepő tényként mutatta be 1984-ben Roth [49], hogy ugyanezt a központi mechanizmust már 1951 óta használják az Egyesült Államokban kórházi gyakornokok elhelyezésére. A példa különlegessége, hogy egy igazán szabadelvű környezetben találtak rá a piac szereplői az anomáliákat felszámoló központi irányításra, amit a rendszerben résztvevők nagy többsége az előnyöket megtapasztalva rögtön elfogadott.

Dolgozatom célja a stabil párosítások modellcsaládjának áttekintő ismertetése mellett a jelenség közgazdaságtani elemzése több működő és lehetséges alkalmazás bemutatásával. Ez az elméleti eszköztár a kooperáción alapuló gazdasági és társadalmi folyamatok és az ezeket szabályozó mechanizmusok megértésében hasznos támpontot adhat.

Gale és Shapley cikkének sajátossága, hogy szándékosan kerüli a matematikai formulákat és közérthető megfogalmazásban ad precíz és józan ésszel mindenki számára világos bizonyításokat az alapvető tételekre. Igyekszem én is hasonló szellemben eljárni, gondolataimat, érveléseimet megpróbálom köznyelven ismertetni. Azonban a pontos levezetésekhez elkerülhetetlen, formulákat nem nélkülöző leírások - eltérő szedéssel - szintén megtalálhatók a dolgozatban a matematikában járatosabb Olvasók érdeklődésének kielégítése végett. Reményeim szerint ezen részek átugrásával is teljes mértékben megérthető a dolgozat mondanivalója, de egyben meghagyja a lehetőséget az egzakt matematikai modell megismerésére.

A matematikai leírásmód elsősorban az operációkutatás, a gráfelmélet és a játékelmélet fogalmaira épít. Az egyértelműség kedvéért ezen tudományterületek dolgozatban felhasznált fontosabb definícióit, tételeit a dolgozat végén összefoglalom.

A dolgozat három részre tagolódik: az elsőben ismertetem a legfontosabb stabil párosítási modelleket (1-4. fejezet), a másodikban a gazdasági alkalmazások bemutatása és elemzése kerül sorra (5-8. fejezet), végül egy speciális kérdéskör, a párosítás-piac dinamikájának vizsgálatával zárom az írásom (9. fejezet).

A dolgozat első fejezetében a stabil párosítások három alapmodelljét ismertetem: a kétoldali és egyoldali párosítás-piacon a szereplők párokat alkothatnak, míg a társulások piacán a partnerkapcsolatok többszemélyesek is lehetnek. A második fejezetben ugyanezen modellek megfelelőit ismertetem megengedve a kifizetéseket a szereplők között. A harmadik fejezetben azt az általánosítási lehetőséget vizsgálom, amelyben a szereplők több kapcsolatban is benne lehetnek, illetve nagyobb súlyú partnerkapcsolatot is létesíthetnek. A negyedik fejezetben tovább finomított modelleket taglalok.

Az ötödik fejezetben arra az igen bonyolult és fontos kérdésre szeretnék választ kapni, hogy milyen indokok vezérelnek egyéneket a kooperációra és miként lehet ösztönözni, koordinálni a keletkező gazdasági, társadalmi kapcsolatokat. A hatodik fejezetben kétoldali párosítás-piacokra hozok példákat, és konkrétan elemzem egy egységes európai felvételi rendszer létrehozásának lehetőségét, szükségességét. A hetedik fejezetben egyoldali párosítás-piacokat mutatok be, itt egy speciális szervtranszplantációs rendszer felállítására teszek javaslatot. A nyolcadik fejezetben általánosabb társulási piacokra hozok példákat.

Az utolsó, kilencedik fejezetben a párosítás-piac dinamikáját vizsgálom. Hogyan változik meg a piaci egyensúly, ha egy új szereplő lép be a piacra. A természetes mechanizmus révén kapott új stabil helyzet speciális tulajdonságokkal rendelkezik. Az ismertetésre kerülő állítások egy része saját kutatási eredményem.

A dolgozat legvégén található szószedet kettős célt szolgál. Egyrészt megadja a magyar kifejezések – néhány esetben a hazai irodalmakban még nem használt fogalmak – angol megfelelőit, másrészt kijelöli a definiálás helyét a szövegben, így segít az eligazodásban.

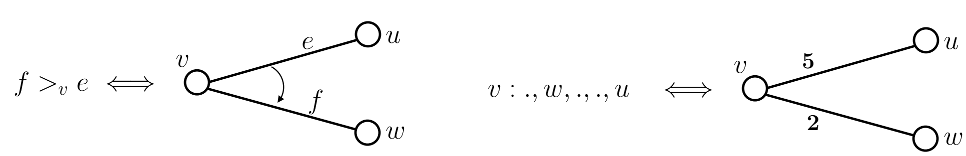
Tartalomjegyzék

1. A stabil párosítás alapmodelljei

A *párosítás* kifejezés a szereplők egy részének párokba rendezését jelenti. Ha egy partnerkapcsolat több egyén között jön létre, akkor azt *társulásnak* mondjuk, a szereplők társulásokba osztását pedig *partíciónak*. *Lehetségesnek* akkor mondunk egy partnerkapcsolatot, ha az létrehozható és mindegyik résztvevője számára elfogadható (vagyis az együttműködés mindegyiküknek hasznosabb, mint kívül maradni). Alapmodellünkben feltesszük, hogy mindegyik szereplő *szigorú preferenciát* tud felállítani a lehetséges partnerkapcsolatai felett. Párosítás esetén ez megfelel a többi szereplő közül a lehetséges partnerek közötti egyértelmű rangsor felállításának. Ha az egyik partnerkapcsolat jobb egy szereplőnek mint egy másik, akkor azt mondjuk, hogy az egyik partnerkapcsolat *dominálja* a másikat a szereplő által.

Stabilnak nevezünk egy párosítást, ha nincs olyan *blokkoló pár*, akik a jelenlegi párosításhoz képest kölcsönösen jobban járnának, amennyiben inkább egymással alkotnának párt. Hasonlóképpen stabilnak nevezünk egy partíciót, ha nincs olyan *blokkoló társulás*, amelyben minden résztvevő jobban járna, ha – kilépve esetleg a jelenlegi társulásaikból – egy új társulást alkotna. Másképpen megfogalmazva a stabilitás feltétele, hogy minden nem megvalósuló partnerkapcsolatot domináljon egy megvalósult partnerkapcsolat legalább egy szereplő által. Vagyis azért nem bomlik fel a piac egyensúlya, mert minden lehetséges új kapcsolat létrejötte meghiúsul legalább az egyik szereplő ellenérdekeltsége miatt.

A stabil párosítás probléma gráfelméleti leírásában a piaci szereplőket egy gráf csúcsainak feleltetjük meg, ha két szereplő párt alkothat, akkor közöttük él fut a gráfban. A lehetséges partnereken vett preferenciák szerint minden csúcsnak szigorú rendezése van a rá illeszkedő éleken. Ha például egy v csúcsra illeszkedik f és e él, és f jobb mint e, akkor azt $f >_v e$-vel jelöljük. Ezt az ábrákon egy irányított szöggel jelezhetjük, ami e élből f élre mutat. A kapcsolatok és egyéni rangsorok megadására gyakran preferencia-listákat használunk. Itt az egyes szereplők listájában a számára elfogadható partnerek vannak felsorolva a preferencia szerint csökkenő sorrendben. Ezt a rangsort a gráf ábráján megjeleníthetjük a csúcsból kiinduló élek sorszámozásával is:



1. Ábra. A preferenciák kifejezésének lehetőségei

A stabil partíció probléma leírására használhatjuk a hipergráfok nyelvét. A szereplőket egy hipergráf csúcsaival reprezentáljuk, a lehetséges társulásokat pedig a megfelelő csúcsokra illeszkedő hiperélekkel. Egy szereplő lehetséges társulásokon vett preferenciáját az őt reprezentáló csúcsra illeszkedő hiperélek szigorú rendezése adja. A hipergráfok elméletében a partíciót egyszerűen párosításnak nevezik, így a stabil partíció probléma megfelel a hipergráfokon értelmezett stabil párosítás fogalmának.

Formálisan, *karakterisztikus függvénnyel* is leírhatunk egy párosítást. Egy adott $G = (V, E)$ gráfban egy M párosítás leírására definiáljunk egy $x_M : E \longrightarrow \{0, 1\}$ karakterisztikus függvényt, ahol minden $e \in E$ élre teljesül, hogy

$$x_M(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ 0 & \text{ha } e \notin M \end{cases}$$

Ekkor az adott gráfra, és az egy csúcsra illeszkedő élek rendezésére $(G, \geq)$ egy M stabil párosítás definiálható a karakterisztikus függvényére megadott egyenlőtlenségekkel:

(P) Párosítás:
$\sum_{v \in e} x_M(e) \leq 1$ minden $v \in V$-re

(S^P) Stabilitás:
minden $e \notin M$ élre létezik egy $v \in e$ csúcs, hogy $\sum_{v \in f, f \geq_v e} x_M(f) = 1$

Vagyis egy élhalmaz párosítás, ha minden csúcsot legfeljebb egy párosításbeli él fed. A párosítás pedig stabil, ha minden a párosításban nem szereplő e élhez található olyan v csúcs, amelyre e illeszkedik és amely fedve van a csúcs által preferált f párosításbeli éllel. A hipergráfokon értelmezett stabil párosítás (stabil partíció) teljesen ugyanígy leírható a fenti egyenlőségekkel. A különbség csak annyi, hogy a karakterisztikus függvény itt a hiperéleken van értelmezve.

A stabil párosítás és stabil partíció probléma speciális esete a kooperatív játékok *nem átváltható hasznosságú* változatának.[1] A piac szereplői alkotják a játékosok N halmazát. A játékosok egy csoportja által elérhető kimenet a csoport egy lehetséges párosítása illetve partíciója, a játék kimenetele az alaphalmaz egy párosítása illetve egy partíciója. Az egyes játékosok preferenciája a kimeneteleken csak attól függ, hogy ők kivel kerültek egy párba illetve társulásba. Nem függ tehát attól, hogy a többiek milyen kapcsolatokat hoznak létre.

Mindhárom alapmodellben teljesül a stabilitás és a megfelelő játék *mag-megoldás* feltételének ekvivalenciája: egy adott párosítást illetve partíciót véve a játékosok egy csoportja akkor és csakis akkor tud a többiektől függetlenül létrehozni egy mindegyikük számára előnyösebb kimenetet, ha létezik egy blokkoló pár illetve társulás.

[1] A kooperatív játékok alapjainak leírása, és az általunk vizsgált problémák definiálása részletesen megtalálható a Matematikai összefoglalóban a dolgozat végén.

1.1. Stabil házasság probléma

A stabil párosítás problémának azt az esetét, amikor a szereplők halmaza két részre osztható úgy, hogy párt csak két, különböző oldalon lévő szereplő alkothat, *stabil házasság problémának* hívjuk.

Ez gráfelméleti nyelven azt jelenti, hogy a stabil párosítás problémában az adott gráf páros. A kooperatív játékelmélet fogalmai szerint a probléma ekvivalens a házasítás játék egy mag-beli kimenetének megtalálásával.

Gale és Shapley alappéldaként használta a fiúk és lányok házasításának problémáját a stabil párosítás modellezésére. Ez a szemléltetés olyannyira természetes és közérthető, hogy a kontextus azóta széles körben használttá vált a kétoldali párosítás-piacok irodalmában. A következőkben részletesen ismertetem a szerzőpáros méltán híressé vált cikkének a stabil párosítás alapmodelljére vonatkozó részét.

Legyen adva fiúknak és lányoknak egy-egy halmaza. Egy fiú és egy lány között lehetséges a házasságkötés, ha kölcsönösen elfogadhatónak találják egymást. Feltesszük, hogy mindenki szigorú rangsort tud felállítani lehetséges partnerei között. Célunk egy *stabil házasítás* létrehozása, vagyis úgy rendezni párokba a lányokat a fiúkkal, hogy ne legyen blokkoló pár: egy olyan fiú és lány, akik nem egymás házastársai, de mindketten boldogabbak lennének egymással. Másképpen fogalmazva, ha egy fiú és egy lány nem egymás házastársai, akkor az egyikük biztosan jobban szereti a jelenlegi házastársát, így nem lesz elcsábítható.

A stabil párosítást előállító klasszikus *leánykérő algoritmus* igen egyszerű és természetes. Amint azt a későbbiekben látni fogjuk egyes kétoldali párosító-piacok esetében hasonló algoritmust alkalmaznak a felvételi eljárás lebonyolítására (8.2 alfejezet). Az algoritmus helyessége pedig elméletileg egy általános fixponttételen alapul (4.3 alfejezet).

Leánykérő algoritmus

Minden fiú az első körben tegyen ajánlatot a neki legjobban tetsző lánynak. Ha egy lány több ajánlatot is kapott, akkor tartsa meg a legjobb udvarlót, a többit utasítsa vissza. A visszautasított fiúk tegyenek ajánlatot a következő lánynak preferenciájuk szerint. Minden körben a lányok, akik több ajánlatot is kapnak, csak a legjobbat tartsák meg feltételesen, a többi kérőt utasítsák vissza véglegesen.

Észre kell vennünk, hogy így a visszautasított fiúk nekik egyre kevésbé tetsző lányoknak kénytelenek ajánlatot tenni, míg a lányok helyzete mindig csak javulhat a folyamat során. Emiatt egy fiú ugyanannak a lánynak biztosan nem tehet ajánlatot kétszer az algoritmus során, a folyamat tehát legfeljebb annyi körben biztosan véget ér, ahány lehetséges pár volt. Amikor már senki nem akar, vagy nem tud új ajánlatot tenni, akkor az udvarló fiúkból férjek lesznek, a maradék fiúkat viszont már minden lehetséges partnerük visszautasította, így ők agglegények maradnak.

Belátjuk, hogy az eredmény egy stabil párosítás. Párosítás, hiszen minden fiú egyszerre legfeljebb csak egy lánynak udvarolt, és minden lány legfeljebb egy kérőt tartott meg minden körben. A stabilitás igazolásához vegyünk egy fiú-lány párt akik nem házasok az algoritmus végén. Ennek két oka lehet, vagy udvarolt a fiú a lánynak, de az visszautasította, vagy nem is udvarolt neki. Ha a fiú vissza lett utasítva valamikor az algoritmus során, akkor abban a pillanatban volt egy jobb kérője a lánynak, de mivel a lány csak egyre jobb és jobb ajánlatott kapott, ezért a legvégén is kedvezőbb udvarlója (férje) lesz a fiúnál. Ha viszont a fiú nem is tett ajánlatot a lánynak, akkor az csak azért lehetett, mert mindvégig neki jobban tetsző lányoknak udvarolt, így a folyamat végén is olyan feleséget kap, akit jobban kedvel a lánynál. Ezzel bebizonyítottuk a következő tételt:

1.1 Tétel (Gale-Shapley) *A stabil házasság problémának mindig létezik megoldása.*

A leánykérő algoritmus által adott eredményről azonban több is elmondható. Minden fiú olyan feleséget kap, akinél jobbat semmilyen más stabil párosításban nem kaphatott volna. Másképpen fogalmazva: minden fiú a legjobb *stabil párját* kapja, vagyis a párosítás *fiú-optimális.*

1.2 Tétel (Gale-Shapley) *A leánykérő algoritmussal kapott megoldás optimális minden fiúnak.*

Ennek igazolásához vezessünk be egy definíciót: mondjuk azt, hogy egy lány *elérhető* egy fiú számára, ha van olyan stabil párosítás, amelyben ők házasok. Indirekt módon tegyük fel, hogy András volt az első olyan fiú az algoritmus során, akit egy számára elérhető lány, Kati visszautasított. Ez csak úgy történhetett meg, hogy abban a pillanatban Katinak volt egy jobb kérője, mondjuk Balázs. Balázsnak biztosan nincs Katinál jobb elérhető partnere, hiszen akkor nem András lett volna az első olyan fiú, akit egy elérhető partner visszautasított. Emiatt Balázs abban a stabil párosításban sem kaphat jobb feleséget Katinál, amikor András és Kati egymással házas.

Ez ellentmondás, hiszen Kati és Balázs ekkor egy blokkoló párt alkotna.

Az 1.1 Tétel tehát azt mondja ki, hogy a stabil párosítás problémának páros gráf esetén mindig van megoldása, ami ekvivalens azzal, hogy a házasítási játék magja sohasem üres.

A stabil házasság probléma megoldásainak struktúrája[2]

Láttuk tehát, hogy a leánykérő algoritmus mindig egy speciális megoldást eredményez, amely ideális minden fiú számára. A lányok helyzete viszont pont fordított, ami a fiúknak a legjobb, a lányoknak a lehető legrosszabb párosítást jelenti. A kétoldali párosítás-piacok stabil megoldásai feletti ellenérdekeltséget Knuth a következőképpen írta le:

1.3 Tétel (Knuth) *Ha M_1 és M_2 két stabil párosítás, ahol M_1-ben minden fiú legalább olyan jó feleséget kap mint M_2-ben, akkor M_1-ben minden lány legfeljebb olyan jó férjet kap mint M_2-ben.*

Ugyanis, ha lenne egy lány (mondjuk Kati) aki jobb párt kap M_1-ben mint M_2-ben, akkor az M_1-beli párja (mondjuk András) szintén határozottan jobb párt kap M_1-ben mint M_2-ben. De akkor András és Kati blokkolná az M_2 párosítást, ellentmondás.

Legyen M és M' két tetszőleges stabil házasítás. Vegyük ezek unióját, vagyis azokat a párokat, akik M-ben vagy M'-ben házasok. Ezután, ha egy fiú két párban is szerepel, akkor hagyjuk el a rosszabbikat, az így kapott párok halmazát jelöljük $M \vee_F M'$-vel. Ha a rosszabbik helyett a jobbik párt hagyjuk el minden fiú esetén, akkor $M \wedge_F M'$ jelölje a maradék párhalmazt.

1.4 Tétel (Conway) *Ha M és M' stabil párosítások, akkor $M \vee_F M'$ és $M \wedge_F M'$ is párosítás, sőt mindkettő stabil.*

Ez a tétel azt implikálja, hogy egy tetszőleges páros gráfon a stabil párosítások egy hálót alkotnak, amely disztributív és teljes. Ennélfogva mély hálóelméleti tételek speciálisan alkalmazhatók erre a megoldáshalmazra.[3]

Megmutatható az is, hogy ha a lányok válaszják ki két stabil párosítás M és M' párjai közül a jobb illetve rosszabb párokat, akkor a hasonlóképpen

[2] A gondolatmenet Roth és Sotomayor [59] könyvéből származik.

[3] Erről részletes leírást Fleiner [23] phd-értekezésében találhat az Olvasó.

definiált $M \wedge_L M'$ és $M \vee_L M'$ szintén stabil párosítások lesznek, és értelemszerűen megegyeznek a $M \vee_F M'$ és $M \wedge_F M'$ párosításokkal. A gondolatmenet egyik fontos következménye az alábbi tétel is:

1.5 Tétel (Roth-Sotomayor) *Egy stabil házasság problémában ugyanazon szereplők lesznek kiházasítva minden stabil megoldásban.*

Igen egyszerű módon látható be az is, hogy ha egy fiúnak, mondjuk Andrásnak a legjobb stabil párja Kati, akkor Katinak a legrosszabb stabil párja András.

Lássunk végül egy példát, amelyben öt fiú és öt lány keres párt magának.

Példa A fiúk és lányok preferenciája a következő:

Fiúk	Preferencia lista	Lányok	Preferencia lista
A	$[K, L]$	K	$[B, A]$
B	$[L, K]$	L	$[A, B, C]$
C	$[L, M, N, O]$	M	$[D, E, C]$
D	$[N, O, M]$	N	$[E, C, D]$
E	$[O, M, N]$	O	$[C, D, E]$

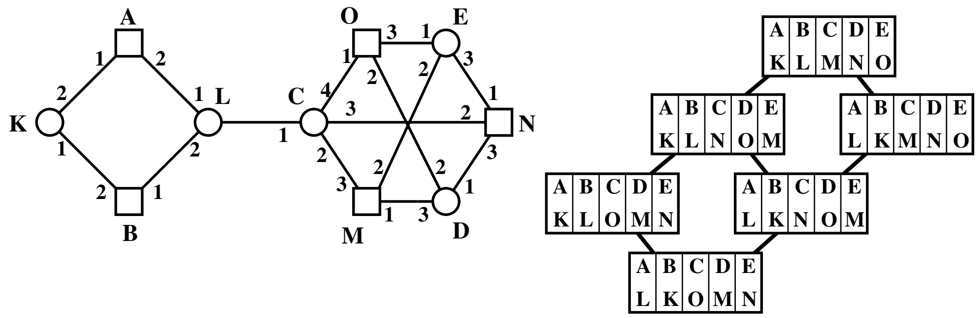
Itt például Dénesnek leginkább Nóri tetszik, másodsorban Orsi, harmadsorban pedig még Mónit is elfogadhatónak tartja feleségnek. A leánykérő algoritmus esetünkben két körben véget ér. Az elsőben csak Laura kap két ajánlatot (Balázstól és Csabától), közülük Csabát utasítja el. A második körben már csak Csaba tesz ajánlatot, amit Móni elfogad. Az így kialakuló $A-K$, $B-L$, $C-M$, $D-N$, $E-O$ házasítás optimális a fiúk számára. (Egyedül csak Csaba nem kapta meg a neki legjobban tetsző lányt, de Laura egyik stabil párosításban sem lehet a felesége, így ő is a lehető legjobban járt.)

A példát leíró gráf és a stabil párosítások rendezett hálója a következő:

Stratégiai kérdések[4]

Dolgozatom fontos célja, hogy egyrészt decentralizáltan lebonyolódó párosítási folyamatok, másrészt olyan központilag vezérelt mechanizmusok működését vizsgáljam, amelyek stabil megoldásra vezetnek. Lényeges kérdés, hogy a szereplők az első esetben tudják-e manipulálni a végeredményt azzal, hogy nem a valódi preferenciájuk szerint cselekszenek. Avagy, centralizált vezérlés esetén tud-e valaki előnyösebb helyzetbe kerülni úgy, hogy

[4] Roth és Sotomayor könyvének [59] 4. fejezete foglalkozik kimerítően ezzel a kérdéssel



2. Ábra. A preferenciák ábrázolása gráffal, a stabil párosítások hálója

nem a valódi preferenciáját adja meg a központi rendszernek. Létezik-e olyan társadalmi mechanizmus, illetve párosító algoritmus, amelyben a racionális szereplőknek nem érdekük csalni?

A leánykérő algoritmus egyrészt egy igen természetes párosítási folyamat, másrészt több fontos működő központi párosító rendszer is ezt az algoritmust használja. Az imént beláttuk, hogy ha a fiúk tesznek ajánlatot, akkor az eredményként kapott párosításban minden fiú a legjobb stabil párját kapja, és minden lány a legrosszabb stabil párt. Ha nem csak egy stabil házasítás létezik, akkor a fiú-optimális házasítás mellett van lány-optimális megoldás is.

Ahhoz, hogy eldöntsük, van-e lehetőség egy szereplőnek kedvezőbb eredményt elérnie a játék folyamán, tisztáznunk kell a szabályokat. A leánykérési folyamat több körből, és minden kör két lépésből áll: minden fiú ajánlatot tehet egy lánynak, és a lányok eldönthetik, hogy melyik udvarlót tartsák meg, és melyiket utasítsák vissza. A játék akkor ér véget, ha nincs új ajánlattétel a fiúk részéről.

A játékosok előre lefektethetnek egy *stratégiát*, vagyis egy olyan elvet, amely szerint döntenek az egyes helyzetekben. Erre példa lehet a *legjobb válasz* stratégia, ahol minden lépésben a legjobb reakciót adja a játékos a többiek előző lépésére. Jelen esetben ez azt jelenti, hogy a valódi preferenciájuk szerint is dönthetnek a fiúk és lányok minden körben pontosan úgy, ahogyan a leánykérő algoritmus működik. A fogalom egzakt definiálása nélkül nevezzük egy játékos stratégiáját *dominánsnak*, ha bármi legyen is a többiek stratégiája, ő sohasem érhet el jobb kimenetelt egy másik stratégia választásával.

A játékosok megegyezhetnek abban is, hogy mindenki csak a stratégiáját meghatározó preferencia-listát adja meg, és a végeredményt egy játékmester számolja ki. Megmutatható, hogy nem különbözik lényegesen a két játék, ha feltesszük, hogy senki sem ismeri a többiek preferenciáját. A témakör két legfontosabb tétele a következő:

1.6 Tétel (Dubins-Freedman, Roth) *Ha egy mechanizmus a fiú-optimális stabil párosításra vezet, akkor minden egyes fiú számára domináns stratégia valódi preferenciájának megadása.*

1.7 Tétel (Roth-Sotomayor) *Ha egynél több stabil párosítás létezik egy feladatban, akkor bármilyen legyen is az alkalmazott párosítási mechanizmus, mindig lesz egy olyan szereplő, akinek érdeke hamis preferenciát megadni, feltéve, hogy a többiek a valódi preferenciájukat adták meg.*

Az utóbbi lehetetlenségi tétel bizonyításának fő gondolata a következő: ha több stabil párosítás is létezik, akkor a valódi preferenciákra biztosan lesz olyan szereplő, aki nem a legjobb stabil párját kapja a kimenetelben. Ennek a szereplőnek érdemes úgy, hamisan megadnia a preferencia-listáját, hogy azt levágja a legjobb stabil párja után, tehát azt állítja, hogy a többiek nem elfogadhatóak a számára. Így a hamis lista szerint már biztosan az eredetileg legjobb stabil párt kapja a kimenetben.

Lássunk erre egy egyszerű példát. Két fiú és két lány közül valójában mindenki elfogathatónak tartja a partnerjelölteket. Andrásnak Kati tetszik leginkább, Balázsnak meg Laura. A lányok viszont pont fordítva vannak ezzel, Katinak Balázs tetszik inkább, Laurának meg András. Mindkét lehetséges házasítás stabil, de vajon melyik alakul ki? Ha előre meg kell adniuk a listájukat a játékmesternek, és az a leánykérő algoritmust használja, akkor a valódi preferenciák megadásával a fiúk járnak jól. Ha viszont bármelyik lány is trükkhöz folyamodna, és mondjuk Kati azt állítaná, hogy csak Balázshoz hajlandó hozzámenni, mert András nem elfogadható számára, akkor az eredmény a lányok számára lesz optimális.

Mi tehát ezen gondolatmenet tanulsága? Ha egy kétoldali párosítás-piac mechanizmusában az egyik oldalnak optimális megoldásra vezet az alkalmazott központi párosító program, akkor ennek az oldalnak érdemes a valódi preferenciáját megadni. A másik oldal szereplői viszont eredményesebb kimenetet érhetnek el, ha hamis listákat adnak meg. De ebben csak akkor lehet biztos egy szereplő, ha ismeri a többiek preferenciáit. Máskülönben pórul is járhat a csalással, esetleg pár nélkül is maradhat a végén. Alapvető fontosságú tehát, hogy ha egy központi párosító-programot működtetünk, akkor a szereplők preferenciái maradjanak titokban a többi szereplő előtt, ahhoz csak a játékmesternek legyen hozzáférése.[5]

[5]Mellékeredményként némi magyarázatot kaphatunk arra, hogy a klasszikus leánykérés

1.2. Stabil szobatárs probléma

A stabil párosítás probléma általános esetét *stabil szobatárs problémának* nevezzük. Itt bármely két szereplő között létrejöhet a párkapcsolat. A problémát már Gale és Shapley is felvetette alapcikkében, sőt példát is adtak arra nézve, hogy nem mindig létezik megoldása egy ilyen feladatnak.

A problémát reprezentáló gráf ez esetben tetszőleges (egyszerű) gráf lehet. A feladat megoldása kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy szobatárs-keresési játék mag-beli kimenetével.

Nem mindig létezik stabil párosítás

Példa Legyen a feladatban szereplő négy szereplő preferenciája a következő

Szereplő	Preferencia lista
A	$[B, C, D]$
B	$[C, A, D]$
C	$[A, B, D]$
D	tetszőleges

Itt az első három szereplő „körbe szereti egymást”. Könnyen látható, hogy egyik párosítás sem lehet stabil, hiszen ha hármójuk közül bármely kettő párt alkotna, akkor a harmadik el tudná csábítani a pár egyik tagját.

Gondoljuk például azt, hogy négy teniszjátékos keres partnert magának, mindenki heti egy óra játékra. András Balázzsal játszana legszívesebben, majd Csabával, legkevésbé pedig Dénessel. (Dénest tulajdonképpen mindenki szeretné elkerülni, mert mindig késik és gyengén is játszik.) Erre a problémára nincs stabil megoldás. Ha például András Balázzsal alkotna párt, akkor Csaba Dénessel lenne kénytelen játszani, de ekkor Csaba és Balázs blokkoló párt alkotna, mindketten szívesebben játszanának egymással, mint jelenlegi partnerükkel.

Több mint két évtized elteltével Irving [31] konstruált először egy olyan algoritmust, amely megtalál egy stabil párosítást, amennyiben ilyen létezik az adott feladatra. A megoldások struktúrájának részletes leírása megtalálható Gusfield és Irving könyvében [28].

folyamán a nőknek miért lehet hasznára a csalfaság, és az információk beszerzése pletykák révén a szóba jöhető kérőkről. Továbbá, az egyenjogúság egyik folyományaként miért válik érdemessé a nőknek is kezdeményezni egy párkapcsolat létrejöttét.

Mindig létezik stabil fél-párosítás

Tan [73] ismerte fel, hogy a stabilitást elrontó páratlan hosszú körökben szereplő párkapcsolatokat fél-intenzitással véve, egy olyan fél-párosítást kaphatunk, amely teljesít bizonyos stabilitási feltételeket.

A teniszjátékos példára gondolva András, Balázs és Csaba megegyezhet abban, hogy heti egyszer összejönnek, és egy-egy félórát játszanak egymással. Így mindhárman egy-egy órát játszanak és csak Dénesnek nem lesz párja. A megoldás stabilitása itt azt jelenti, hogy mindegyik párosban van egy olyan szereplő, aki nem szeretne több időt játszani abban a párban. Ha például András és Dénes kapcsolatát nézzük, akkor világos, hogy András miatt nem fognak ők semennyit se egymással játszani, mert András kitölti a teniszre fordított egy óráját két jobb partnerrel vívott fél-fél óra játékkal. Ha András és Balázs kapcsolatát nézzük, akkor a jelenlegi félóra játékot Balázs nem szeretné tovább növelni, hiszen ő a maradék félórájában Csabával játszik, akivel jobban szeret teniszezni.

Egy *stabil fél-párosításban* a szereplők párokat és *fél-párokat* alkothatnak. Minden szereplő legfeljebb egy párban vagy két fél-párban lehet benne. A stabilitás feltétele, hogy ha két szereplő nincs párosítva, akkor legalább az egyiküknek vagy van egy jobb párja, vagy van két jobb fél-párja. Továbbá, ha két szereplő fél-párban van, akkor legalább az egyiküknek van egy másik, ennél jobb fél-párja. Összefoglalóan, egy fél-párosítás stabil, ha nincs olyan blokkoló pár, amely szereplőinek lehetősége és egyben kölcsönös érdeke a kapcsolatuk intenzitásának növelése (csökkentve esetleg ezáltal más kapcsolataik kihasználtságát). Másképpen fogalmazva, ha egy párkapcsolat nincs teljesen kihasználva, akkor az intenzitás növelése legalább az egyik félnek nem érdeke, mert a maradék kapacitása le van kötve egy vagy több kedvezőbb kapcsolattal. Vagyis a piac egyensúlya azért marad fenn, mert minden kapcsolat intenzitásának növelése meg lesz vétózva az egyik szereplő ellenérdekeltsége miatt.

Egy fél-párosítást általában hM-el jelölünk, a benne szereplő párok halmazát M-el, a fél-párok halmazát pedig H-val. Vagyis $hM = H \cup M$.

A *stabil fél-párosítás* pontos definiálásához, nem kell mást tennünk, mint hogy a párosítás leíró függvényének értékkészletét $\{0,1\}$-ről $\{0,\frac{1}{2},1\}$-re módosítjuk úgy, hogy ha $hM = H \cup M$ egy fél-párosítás, akkor

$$x_{hM}(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in M \\ \frac{1}{2} & \text{ha } e \in H \\ 0 & \text{ha } e \notin hM \end{cases}$$

Ekkor az eredeti (P) és (S^P) egyenlőtlenségek változatlan formában írják le a fél-párosítás illetve a stabilitás feltételét.

A fél-párosítás tehát azt jelenti, hogy minden csúcs legfeljebb 1 összértékkel van fedve. A stabilitási kritérium pedig azt mondja, hogy ha egy e él nem szerepel a fél-párosításban ($e \notin hM$), akkor e egyik v pontjában vagy egy e-nél jobb M-beli éllel, vagy két e-nél jobb H-beli éllel van fedve. Egy fél-értékű (H-beli) e él egyik végpontjának maradék fél-kapacitása pedig egy e-nél jobb H-beli f éllel kell hogy fedve legyen.

Az a megfigyelés, hogy minden fél-párhoz kapcsolódnia kell az egyik szereplőjénél egy másik, nálánál jobb fél-párnak, rögtön azt eredményezi, hogy a fél-párok köröket alkotnak, amely mentén a szereplők „körben kedvelik egymást". Az ilyen preferencia-köröket *ciklusoknak* nevezzük. Tan [73] a következő tételt látta be a stabil fél-párosításokról[6].

1.8 Tétel (Tan) *Minden stabil szobatárs feladatra létezik stabil fél-párosítás, amely párokból és fél-párokból álló páratlan hosszú ciklusokból áll. A szereplők halmaza tehát felosztható*

a) párosítatlan,

b) ciklus-beli és

c) párosított szereplőkre

Továbbá minden stabil fél-párosításban ugyanazok a páratlan ciklusok jönnek létre és ugyanazok a szereplők maradnak párosítatlanok.

Kérdés, hogy miért hasznos a stabil fél-párosítás megkonstruálása? Egyrészt, ha nem tartalmaz páratlan ciklust, akkor egy stabil párosítást találtunk a gráfban, ha pedig tartalmaz páratlan ciklust, akkor tudjuk, hogy nem létezhet stabil párosítás. Másrészt lehetnek olyan természetes feladatok, (mint például a fent említett teniszjátékosok esete) ahol a fél-megoldásnak is van értelme. Végül, ha egy stabil fél-párosítás minden páratlan köréből elhagyunk egy

[6] Tan eredeti elnevezése stabil partíció volt, amellyel a ponthalmaz partícionálására utalt. Az új elnevezést azért tartjuk indokoltnak, mert több általánosított modellben is természetesebb élekről és nem pontokról beszélni. Másrészt a stabil partíció kifejezés használatos a kooperatív játékelmélet egy másik általunk is taglalt esetében is, ahol a hipergráfokon értelmezett stabil párosítással ekvivalens jelentést hordoz.

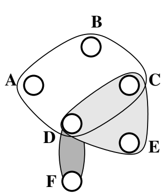
szereplőt, és a ciklusok maradék szereplőit a körök mentén párokba rendezzük, akkor egy olyan párosítást kapunk, amely stabil a redukált halmazon. Másképpen fogalmazva – erre a párosításra nézve az eredeti feladatban – minden blokkoló párban az egyik szereplő a mellőzött személyek közül való, így a stabilitás megmaradhat, ha sikerül őket valahogy kompenzálnunk.[7]

1.3. Stabil társulás probléma

A *stabil társulás problémában*, – mint ahogy a bevezetőben már definiáltam – többszereplős társulások alakulhatnak meg, de minden résztvevő legfeljebb csak egy társulásban vehet részt. A szereplők ilyen módon történő csoportokra osztását hívjuk *partíciónak*. Egy adott partíció stabil, ha nincs olyan blokkoló társulás, amely nem része a partíciónak, de szereplői egyértelműen jobban járnának a társulás létrejöttével.

A stabil társulás probléma a hipergráfokon értelmezett stabil párosítás problémával ekvivalens. Egy megoldása pedig kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy társulási játék mag-beli kimenetelének.

Példa Hat résztvevő megy el egy nap a társasjáték klubba. Háromféle játék jöhet szóba (a lehetőségek és a játékosok hangulata miatt). András Balázzsal, Cilivel és Dáviddal leülhet bridzselni, Cili Dáviddal és Eszterrel ultizhat, végül Dávid sakkozhat Ferivel. Cili szívesebben ultizna, mint bridzselne, Dávid preferenciája pedig: bridzs, ulti, sakk.



Játékok	Szereplői	Szereplők	Preferencia listák
$b:$	$\{A, B, C, D\}$	C	$[u, b]$
$u:$	$\{C, D, E\}$	D	$[b, u, s]$
$s:$	$\{D, F\}$		

Stabil megoldást lehet az ultizás, hiszen Dávid kevésbé szeretne sakkozni Ferivel, mint ultizni a többiekkel, a bridzselés pedig Cili miatt hiúsul meg, mert Cili jobban örül az ultinak. De stabil megoldás lehet a bridzselés is,

[7] Amennyiben nem létezik stabil párosítás a gráfban, akkor természetes módon adódhat a feladat, hogy találjunk egy olyan párosítást, amelyben a lehető legkevesebb a blokkoló élek száma. Ilyen párosítást azonban elméleti értelemben nehéz találni, sőt Abraham, Biró és Manlove [3] nemrég azt is belátta, hogy a blokkoló élek minimális számát még approximálni sem tudjuk polinomiális algoritmussal semmilyen konstans faktoron belül. Emiatt a fenti eljárás fontos heurisztika lehet egy olyan párosítás megtalálására, amelyben a blokkoló élek száma „viszonylag" kicsi.

hiszen Dávid továbbra sem szeretne sakkozni inkább Ferivel, az ultizás pedig most Dávid miatt hiúsul meg, mert ő legjobban bridzselni szeret. A sakkozás viszont nem stabil megoldás, hiszen mind a bridzs, mint az ulti lehetséges szereplői áttérnének inkább egy új játékra, vagyis ezek a társulások blokkolnának.

Természetesen nem mindig létezik stabil megoldása a társulási feladatnak, hiszen ennek részesetének, a szobatárs problémának sincs mindig. Ebben az esetben viszont annak eldöntése, hogy létezik-e megoldás már elméletileg nehéz (nagy valószínűséggel nem létezik rá polinomiális idejű algoritmus). Nagyon speciális esetekben lehet csak garantálni a megoldás létezését. [8]

Mindig létezik stabil tört-partíció

Ahogy a szobatárs probléma esetén megengedtük a fél-párok megalakulását, úgy most megengedjük, hogy egy partnerkapcsolat akármilyen részleges intenzitással működjön, vagyis létrejöhessenek *tört-társulások*. A tört-társulások pedig együttesen egy *tört-partíciót* adnak, amelyben az egyes szereplők kapacitásukat több – részleges intenzitású – partnerkapcsolattal is kitölthetik. Egy tört-partíció *stabil*, ha nincs olyan blokkoló társulás, mely minden szereplőjének lehetősége és érdeke a társulás intenzitásának növelése (csökkentve ezzel esetleg más társulások intenzitását). Másképpen fogalmazva, akkor stabil egy tört-partíció, ha minden nem teljes kihasználtságú társulásban van olyan szereplő, aki nem érdekelt az intenzitás növelésében, mert maradék kapacitása az adott társulásnál kedvezőbb társulásokkal van kitöltve. Vagyis a piac egyensúlya itt most azt jelenti, hogy minden lehetséges társulás intenzitásának növelése meg fog hiúsulni a társulás egyik szereplőjének ellenérdekeltsége miatt.

A társasjáték-klubra gondolva, ha feltesszük, hogy mindenki 3 órát szeretne ott tölteni, akkor egy stabil tört-megoldás lehet az is, ha 1 órát ultiznak és 2 órát bridzselnek. Hiszen a több ultizást Dávid vétózza meg, mert a maradék idejében bridzsezik, amit jobban szeret. Bridzselni Cili miatt nem lehet hosszabban, mert ezt csak az ultizás rovására lehetne megtenni és ez neki nem érdeke. A sakkozás pedig továbbra sem kerül szóba, mert Dávid ultizni és bridzselni is jobban szeret ennél.

A stabil tört-partíció (avagy a hipergráfon értelmezett stabil tört-párosítás) definiálásához is az eredeti (P) és (S^P) egyenlőtlenségeket kell csak használnunk. Most a karakterisztikus függvénnyel egy hipergráf éleinek adunk értékeket, ahol az értékkészlet $[0, 1]$, vagyis tetszőleges 0 és 1 közötti racionális szám. (Ha minden érték

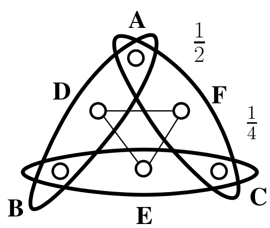
[8] Ez a kérdést részletesen elemzi Pápai [47].

0 vagy 1, akkor beszélünk stabil partícióról, avagy a hipergráfon értelmezett stabil párosításról.)

A stabil tört-partíció létezése Scarf [67] híres tételének következménye.[9]

1.9 Tétel (Scarf) *Minden stabil társulás feladatra létezik stabil tört-partíció.*

Példa Lássunk végül egy példát arra az esetre, amikor csak egy tört-megoldása van a feladatnak (nincs egész, sem fél-egész megoldás sem).



Játékok	Szereplői	Szereplők	Preferencia listák
u_1 :	$\{A, D, B\}$	A	$[u_1, u_3]$
u_2 :	$\{B, E, C\}$	B	$[u_2, u_1]$
u_3 :	$\{C, F, A\}$	C	$[u_3, u_2]$
s_1 :	$\{D, E\}$	D	$[u_1, s_1, s_2]$
s_2 :	$\{E, F\}$	E	$[u_2, s_2, s_3]$
s_3 :	$\{F, D\}$	F	$[u_3, s_3, s_1]$

Itt az egyetlen megoldást az jelenti, ha fél-ideig ultiznak mindhárom hármasban, D, E, F játékosok pedig a maradék fél-idejüket negyed-negyed idejű sakkozással töltik ki.

[9]A részletes levezetés Aharoni és Fleiner [4] cikkében található meg.

2. Kifizetéses modellek

Kifizetéses modellekről akkor beszélünk, ha megengedjük, hogy a létrejött párok illetve társulások tagjai valamilyen formában kompenzálják egymást. Két dolgot követelünk meg: egyrészt mindenki pontosan meg tudja határozni mekkora hasznosságot jelent neki egy lehetséges partnerkapcsolatban való részvétel, másrészt feltesszük, hogy létezik egy olyan átváltható hasznosságú áru, amely átadható a kapcsolatban lévő szereplők között, és a transzfer révén ugyanannyival csökken az azt átadó fél hasznossága, mint amennyivel a fogadó fél hasznossága nő.[10]

A stabil párosítási és partíciós modellek kifizetéses változatának megoldása ezért mindig két elemű: megadjuk, hogy mely párok, társulások alakultak meg és mennyi hasznosságot adtak át egymásnak a szereplők. A stabilitás feltétele, hogy ne legyen olyan megvalósulatlan (blokkoló) pár illetve társulás, melynek tagjai mind jobban járnának, ha a partnerkapcsolatuk létrejönne és megfelelő kifizetésekkel kompenzálnák egymást.

Párosítás esetén a lehetséges párok kételeműek, az i szereplő hasznosságát egy $\{i, j\}$ kapcsolatban jelöljük $u_i(\{i, j\})$-vel. Egy M párosítás esetén az átadott kifizetéseket gyűjtsük egy $p(M)$ vektorba, melynek i-edik koordinátája, $p_i(M)$ jelentse azt a (pozitív vagy negatív) transzfert, amelyet az i-edik játékos kapott. Transzfert csak M-beli párok adhatnak egymásnak, és egy $\{i, j\}$ páron belül a transzferek összértéke természetesen nulla, vagyis $p_i(M) + p_j(M) = 0$. Ha egy szereplő nem eleme egy párnak, akkor értelemszerűen nem lehet kifizetése, vagyis $p_i(M) = 0$ minden M-ben nem szereplő i-re. Egy i játékos *összhasznát* h_i-vel jelölve tehát $h_i = 0$, ha i nincs párosítva, és $h_i = u_i(\{i, j\}) + p_i(M)$, ha i szereplő a j-vel alkot párt és $p_i(M)$ transzfert kap tőle.

Egy $[M, p(M)]$ párt *stabil megoldásnak* nevezünk, ha nem létezik olyan megvalósulatlan $\{a, b\}$ blokkoló pár, hogy $u_a(\{a, b\}) + u_b(\{a, b\}) > h_a + h_b$. Ekkor ugyanis a-nak és b-nek érdekében állna kilépni az M-beli kapcsolataiból és új párt alkotni, majd az a-tól b-nek juttatott $u_a(\{a, b\}) - h_a$ és $h_b - u_b(\{a, b\})$ közötti hasznosság átadásával mindketten jobban járnának.

Partíció esetén a lehetséges S társulásban az i szereplő hasznosságát jelöljük $u_i(S)$-el. Egy π partíció esetén $p(\pi)$ vektor tartalmazza a kifizetéseket,

[10] Az átváltható hasznosságú árut gondolhatjuk pénznek feltéve, hogy mindenkinek ugyanakkora hasznosság-növekedést okoz, ha 1000Ft-al több van a tárcájában, és pontosan háromszor ekkora növekedést ha 3000Ft-ot kap. Ez nem realisztikus, ha a szereplők anyagi helyzete nagy mértékben különbözik. A pénz helyett általánosan gondolhatunk a kapcsolatban részt vevők áldozatvállalására is, arra az erőfeszítésre vagy időre, amit a kapcsolat fenntartására fordítanak a szereplők.

ennek i-edik koordinátája, $p_i(\pi)$ jelentse azt a transzfert, amit az i-edik játékos adott (vagy kapott) a társulás tagjainak (vagy tagjaitól). Egy megvalósuló S társuláson belül a transzferek összértéke természetesen nulla, vagyis $\sum_{i\in S} p_i(S) = 0$. Egy játékos összhaszna legyen $h_i = 0$, ha nem tagja társulásnak, és $h_i = u_i(S) + p_i(\pi)$, ha az S társulás tagja, és $p_i(\pi)$ transzfert kap.

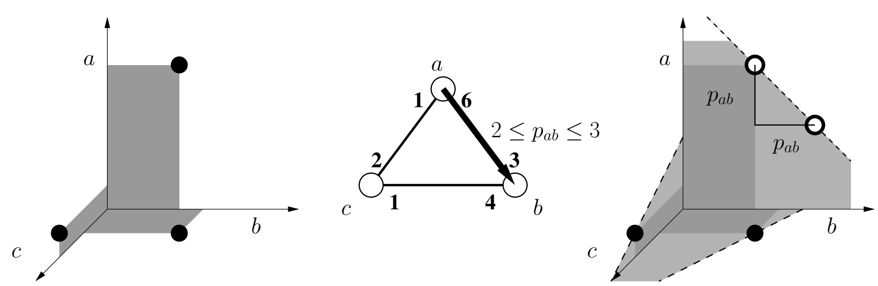
Egy $[\pi, p_(\pi)]$ párt stabil megoldásnak nevezünk, ha nem létezik olyan megvalósulatlan B blokkoló társulás, hogy $\sum_{i\in S} u_i(S) > \sum_{i\in S} h_i$. Ekkor ugyanis az S szereplőinek kölcsönösen érdekükben állna kilépni a π-beli társulásaikból és új társulást alapítaniuk, majd a megfelelő hasznosságok átadásával mindannyian jobban járnának.

A Matematikai összefoglalóban megtalálható részletes levezetés alapján állíthatjuk, hogy a stabil párosítás és partíció problémák kifizetéses változataihoz definiálhatók olyan átváltható hasznosságú kooperatív játékok, melyeknek mag-elosztása kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető a fenti problémák stabil megoldásainak.

A kooperatív játékelméleti leírásból kiderül, hogy egy stabil megoldás mindig egy olyan párosítás vagy partíció által valósul meg, amelyben a szereplők hasznosságainak összege maximális. A stabil megoldás létezésének szükséges és elégséges feltétele pedig az, hogy tört intenzitású kapcsolatokkal ne lehessen nagyobb összhasznosságot elérni.

Bevezetésképpen lássunk két példát egy-egy háromszemélyes stabil párosítási problémára kifizetéssel és kifizetés nélkül.

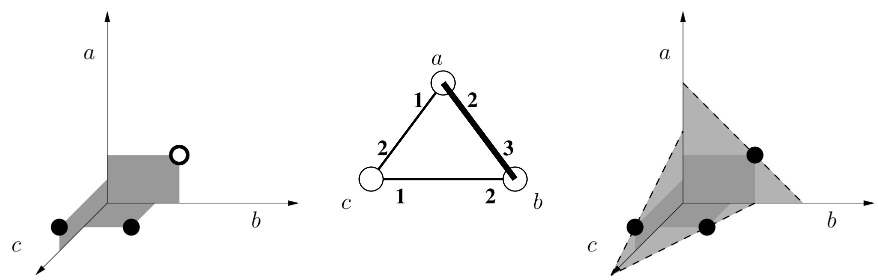
Példa A három szereplő hasznossága a párkapcsolatokban legyen a következő: $u_a(\{a,b\}) = 6$, $u_b(\{a,b\}) = 3$, $u_b(\{b,c\}) = 4$, $u_c(\{b,c\}) = 1$, $u_c(\{c,a\}) = 2$, $u_a(\{c,a\}) = 1$.



3. Ábra. A párok hasznosságai és a stabil megoldás kifizetéses esetben

A fenti ábrán látható, hogy kifizetés nélküli esetben nem létezik stabil párosítás, illetve, hogy kifizetéses esetben az $\{a, b\}$ egy stabil párt alkot ha a 2 és 3 közötti hasznosságot átad b-nek.

Példa A három szereplő hasznossága a párkapcsolatokban legyen a következő: $u_a(\{a,b\}) = 2$, $u_b(\{a,b\}) = 3$, $u_b(\{b,c\}) = 2$, $u_c(\{b,c\}) = 1$, $u_c(\{c,a\}) = 2$, $u_a(\{c,a\}) = 1$.



4. Ábra. A párok hasznosságai és a stabil megoldás kifizetés nélküli esetben

A fenti ábrán látható, hogy kifizetés nélküli esetben az $\{a, b\}$ egy stabil pár, illetve hogy kifizetéses esetben nem létezik stabil megoldás. Ennek oka, hogy egy megengedett pár csak legfeljebb 5 összhasznot eredményez a szereplőknek, míg ha fél-intenzitású kapcsolatokat is megengedünk, akkor a három fél-pár összértéke $5,5$ lesz. (Pontosabb indoklás a 2.2 fejezetben található.)

2.1. Stabil házasság probléma kifizetéssel

A stabil házasság probléma kifizetéses esetében egy stabil megoldás kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy hozzárendelési játék magelosztásának. Ez a Matematikai összefoglalóban levezetésre kerül.

Egy $\{i, j\}$ lehetséges pár értéke legyen $v(\{i,j\}) = u_i(\{i,j\}) + u_j(\{i,j\})$, az x elosztásból az i-edik játékos részesedése természetes módon megfelel a játékos összhasznosságának, $x_i = h_i = u_i + p_i(M)$.

A stabil megoldás tehát akkor és csakis akkor létezik, ha a megfelelő hozzárendelési játék magja nem üres. Ez pontosan akkor teljesül, ha a játék kiegyensúlyozott.

A kiegyensúlyozottság vizsgálatához használjunk gráfelméleti megfontolást. A szereplőket feleltessük meg egy G páros gráf csúcsainak, és két csúcs között pontosan akkor menjen él, ha az adott pár megengedett. Minden $e = \{i, j\}$ élen legyen akkora $w(e)$ súly, amekkora az adott $\{i, j\}$ pár $v(\{i, j\})$ értéke. A játék $v(N)$ értéke ebben az esetben egyenlő $\nu_w(G)$-vel, vagyis a maximális összsúlyú párosítás értékével. Egerváry tétele szerint páros gráfban mindig van ugyanekkora értékű fedés is. Ennek következménye, hogy egy c minimális értékű fedésnek kölcsönösen egyértelműen megfelel egy x mag-elosztás (hiszen a $c(i) + c(j) \geq w(\{i, j\})$ fedés-feltétel a $x(i) + x(j) \geq v(\{i, j\})$ mag-feltétellel ekvivalens).

A fentiekből adódik a következő tétel:

2.1 Tétel (Shapley-Shubik) *A hozzárendelési játék magja sohasem üres.*

Ezzel ekvivalens:

2.2 Tétel *A stabil házasság probléma kifizetéses változatának mindig van stabil megoldása.*

2.2. Stabil szobatárs probléma kifizetéssel

A stabil szobatárs probléma kifizetéses változatában egy stabil megoldás kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy szobatárs-keresési TU-játék mag-elosztásának. Stabil megoldás akkor és csak akkor létezik, ha a mag nem üres. Ennek szükséges és elégséges feltétele a játék kiegyensúlyozottsága.

Ha az előzőekhez hasonlóan definiálunk egy súlyozott gráfot a szobatárs-keresési TU-játékhoz, akkor egy maximális összértékű kiegyensúlyozott rendszer ebben az esetben kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy maximális összsúlyú tört-párosítással. Nem kell mást tennünk, mint az $\{i, j\}$ megengedett párra tett λ_e súly helyett $x(e)$ értéket adni a neki megfelelő $e = \{i, j\}$ élnek. Ennek maximuma – a Matematikai összefoglalóban részletezett okokból – elérhető fél-párosítással is.

A játék kiegyensúlyozottságának definíció szerinti feltétele tehát, hogy a játék éktékét, vagyis a maximális összsúlyú párosítás értékét ne haladja meg a maximális összsúlyú fél-párosítás értéke. Ebben az esetben ugyanis a minimális értékű fedés ismét megad egy elosztást a játék magjában.

A kiegyensúlyozottság eldöntése ebben a játékban tehát gráfelméleti módszerekkel megoldható. A maximális összsúlyú fél-párosítás a „magyar módszerrel”, a maximális összsúlyú párosítás pedig Edmonds és Gallai algoritmusával megtalálható. Mindkét módszer már 40 éve közismert a matematikában.[11]

2.3. Stabil társulás probléma kifizetéssel

A stabil társulás probléma kifizetéses esetében egy stabil megoldás kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy partícionálási TU-játék mag-elosztásának. Ezek létezésének szükséges és elégséges feltétele a játék kiegyensúlyozottsága.

Ezt a kérdést a hipergráfok segítségével vizsgálhatjuk. A játékosoknak most egy H hipergráf csúcsait feleltetjük meg, ahol a csúcsok egy halmazára pontosan akkor illeszkedik egy hiperél, ha a nekik megfelelő játékosok társulást alakíthatnak. Egy S társulás $v(S)$ értékének feleljen meg egy e hiperél $w(e)$ súlya. A játék értéke $v(N)$ egy maximális összértékű partíció értékeként van definiálva, ennek megfelel a H hipergráfon vett maximális összsúlyú partíció (vagy más néven hiperélekből álló párosítás). Ha ezt az értéket nem haladja meg semmilyen kiegyensúlyozott társulás-rendszer értéke, akkor a játék definíció szerint kiegyensúlyozott. Ezzel ekvivalens feltétel, hogy a H hipergráf maximális összsúlyú tört-partíciójának értéke ne haladja meg a maximális összsúlyú partíció értékét.

A kiegyensúlyozottság eldöntése általános esetben elméletileg nehéz probléma (nagy valószínűséggel nem létezik rá polinomiális idejű algoritmus), de speciális játékoknál, a megfelelő hipergráfokra ismert lehet a két érték egyezősége. Számos műszaki probléma megoldásaként mérnöki alkalmazásokban is több heurisztikát fejlesztettek ki, ezek segíthetnek konkrét játékelméleti feladatok megoldásában is.

Végül fontos megjegyzésként szeretném kiemelni, hogy a stabil megoldások mindegyik esetben egy maximális összhasznosságú megoldást adnak. Vagyis, ha a modell feltételei teljesülnek, akkor a kifizetéses partnerkapcsolatok társadalmi haszna maximális, amennyiben a társadalmi hasznot az egyéni hasznosságok összegeként definiáljuk.

[11]Hasonló következtetésre jutott a szobatárs-keresési TU-játék vizsgálatában Eriksson és Karlander [21] gráfelméleti tételek használata nélkül.

3. Kapacitásos modellek

A fejezet során azt a kérdést vizsgálom, amikor a szereplőknek megengedett, hogy több kapcsolatban is benne legyenek egyszerre, illetve, hogy többszörös intenzitású kapcsolatokat is kialakíthassanak.

3.1. Kiosztási feladat

Minden szereplőnek legyen megadott kapacitása, amely meghatározza, hogy legfeljebb hány kapcsolatban vehet részt. *Kiosztásnak* nevezünk egy olyan kapcsolati rendszert, ahol mindenki legfeljebb annyi kapcsolatban vesz részt, amennyi a kapacitása. Egy kiosztásban kiköthetjük, hogy a szereplők csak párokat alkothassanak, illetve megengedhetjük, hogy többszereplős társulásokban legyenek tagok.

Az első esetben *stabilnak* nevezünk egy kiosztást, ha nincs olyan megvalósulatlan (blokkoló) pár, melynek tagjai kölcsönösen jól járnának ha – esetleg egy-egy meglévő kapcsolatuk felbontásával – inkább egymással alkotnának párt. A második esetben a blokkoló társulás minden tagja határozottan jobban járna az új koalíció megalakításával. Másképpen mondva, a stabilitás feltétele, hogy minden nem megvalósult partnerkapcsolat dominálva legyen egy szereplő által, ahol a dominancia most azt jelenti, hogy az adott szereplő teljes kapacitása ki van használva kedvezőbb partnerkapcsolatokkal. Tehát azért nem bomlik fel a piac egyensúlya, mert minden új kapcsolat létrejötte meghiúsul egy szereplő ellenérdekeltsége miatt.

Gráfelméletben, ha minden v pont legfeljebb egy adott számú, $b(v)$ darab éllel lehet fedve, akkor a — párkapcsolatokon vett kiosztásnak megfelelő — élhalmazt b-*párosításnak* nevezzük. Ha a kiosztásban társulások is részt vehetnek, akkor a megfelelő hipergráf b-partícionálásáról (vagy hiperéleken értett b-párosításról) beszélünk.

A kiosztás illetve a stabilitás kritériuma hasonlóképpen leírható tömör formulákkal a karakterisztikus függvények segítségével. Ez esetben egy $K \subseteq E(G)$ kiosztás x_K karakterisztikus függvénye szintén az

$$x_K(e) = \begin{cases} 1 & \text{ha } e \in K \\ 0 & \text{ha } e \notin K \end{cases}$$

módon definiálható. A kiosztás és a stabilitás feltétele pedig a következőképpen módosul:

(K) Kiosztás:

$\sum_{v \in e} x_K(e) \leq b(v)$ minden $v \in V$-re

(S^K) Stabilitás:

minden $e \notin K$ élre létezik egy $v \in e$ csúcs, hogy $\sum_{v \in f, f \geq_v e} x_K(f) = b(v)$

Megjegyezzük, hogy a kooperatív játékelmélet részletesen tárgyalt mag-tulajdonsága ezen modellekre már nem átvihető.

Népszerű alkalmazások

Ehelyütt is szeretném kiemelni, hogy a legtöbb megvalósult alkalmazás a kétoldali piacokra érvényesülő kiosztásos modellcsaládhoz köthető. Jellemző esetben a piac egyik felén a jelentkezők állnak, a másikon pedig a felvevőhelyek, akik egyenként adott számú jelentkezést kívánnak elfogadni. Ezen piacokra jellemző a résztvevők nagy száma, illetve a jelentkezések egyidejűsége.

A legismertebb alkalmazás az egyetemi felvételi eljárás. Az egyik oldalon a felvételiző diákok állnak, a másikon az egyetemek. Minden egyetemre szakonként kvótákkal korlátozzák a felvehető diákok számát. A diákok szigorú preferenciái a jelentkezési lapokon vannak feltüntetve, az egyetemek pedig általában a felvételi vizsgák alapján állítanak fel rangsort a jelentkezők között. Természetesnek tűnő kívánalom, hogy a felvételi végén ne legyen olyan elégedetlen diák-egyetem pár, ahol a diákot nem vették fel az adott egyetemre, hanem csak egy számára rosszabbra (vagy sehová), pedig az egyetem nem tudta feltölteni kvótáját az adott diáknál jobb jelentkezőkkel.

A másik általánosan elismert és használt alkalmazási terület a munkaerőpiac. Az egyik oldalon itt a munkavállalók állnak a másikon pedig a munkahelyek. Jellemzően olyan esetekben működnek jól a párosítási rendszerek, ha egy adott munkavállaló csoport egyidőben válik munkakeresővé. Ilyen helyzet alakul ki az egyetemen végzett, első munkavállalók elhelyezkedésekor, gyakornoki álláshelyek feltöltésekor.[12]

Felvételi eljárás

Az algoritmus leírását Gale és Shapley [27] adta meg jelen formájában. Az eljárás menete teljesen hasonló a leánykérő algoritmuséhoz. A diákok jelentkeznek a preferencia-listájukon szereplő első egyetemre. Ha egy egyetem több jelentkezést kap, mint amennyi a kvótája, akkor feltételesen elfogadja a legjobbakat közülük, akik viszont nem férnek be a kvótába, azokat

[12]Mindkét területet részletesen tárgyaljuk – működő párosítási rendszerek bemutatásával – a 6. fejezetben.

véglegesen visszautasítják. Minden körben a visszautasított diákok jelentkeznek a listájukon szereplő következő egyetemre (mindig egyre rosszabbra), az egyetemek pedig ugyanúgy az adott kvóta szerint tartják meg feltételesen (az egyre jobb) jelentkezőket, és utasítják vissza a kimaradókat.

Az algoritmus véget ér, hiszen egy diák kétszer nem fog jelentkezni ugyanoda, eredményként pedig egy stabil kiosztást kapunk. Kiosztást, hiszen minden diák legfeljebb csak egy helyre jelentkezik minden körben, és az egyetemek sem tartanak meg a megengedettnél több diákot. A stabilitás igazolásához vizsgáljunk meg egy nem megvalósult diák-egyetem párt. Vagy azért nem vették fel a diákot, mert nem is jelentkezett az egyetemre, vagy azért mert visszautasította őt az egyetem. Az első esetben a diákot egy jobb helyre vették fel, ezért nem jeletkezett az adott egyetemre. A másodikban amikor az egyetem visszautasította a diákot, akkor ezt azért tette, mert abban a pillanatban kvótája fel volt töltve jobb jelentkezőkkel, és mivel az algoritmus során csak egyre jobb jelentkezések érkezhetnek hozzá, ezért a végén se férne be a diák a legjobb, a kvóta szerint felvehető, diákok közé. Igazoltuk tehát az alábbi tételt abban a speciális esetben ,amikor az egyik oldalon lévő szereplők kvótája azonosan 1.

3.1 Tétel (Gale-Shapley) *A stabil kiosztás feladatnak kétoldali párosítás-piacokon mindig van stabil megoldása.*

A fiú-lány esethez teljesen hasonlóan igazolható az is, hogy ha a diákok jelentkezésével a fent leírt módon történik az algoritmus, akkor a kapott megoldás diák-optimális lesz, vagyis nem létezik olyan stabil kiosztás, ahol bármely diák jobb egyetemre lenne felvéve.

A stabil kiosztás feladatnak páros gráfok esetén tehát mindig van megoldása. Nem páros gráfok esetén természetesen már nem feltétlenül, hiszen a kapacitás nélküli esetben is tudtunk adni ellenpéldát. Stabil fél-kiosztás – illetve társulás probléma esetén stabil tört-kiosztás – viszont mindig létezik. Ezekről a fejezet végén ejtünk szót röviden.

A megoldások struktúrájára nézve kétoldali párosítás-piacok esetén hasonló állítások mondhatók ki. A két oldal ellenérdekeltsége itt is megjelenik, és érvényes a következő híres tétel is:

3.2 Tétel (Roth-Sotomayor) *Kétoldali párosítás-piacokon a stabil kiosztás probléma minden stabil megoldásában ugyanakkora kvótát töltenek fel az egyes szereplők. Sőt, amely szereplők nem töltik fel a kvótájukat, azok ugyanazon párkapcsolatokban vesznek részt minden stabil kiosztásban.*

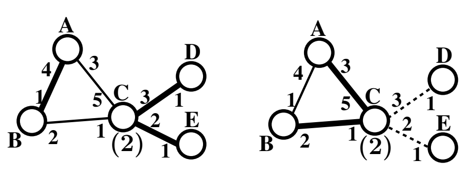
A stabil kiosztások páros gráfok esetén ismét teljes disztributív hálót alkotnak. Ennek legegyszerűbb magyarázata a 3.2 alfejezetben bemutatandó konstrukciós visszavezetés.

Stratégiai kérdések

Ha a párosítás-piac egyik oldalának szereplői csak egy kapcsolatban vehetnek részt, akkor rájuk nézve változatlanul érvényben maradnak a stabil házasság problémánál tárgyalt állítások. Vagyis a jelentkezők számára itt is domináns stratégia az igazi preferenciák megadása a játékvezetőnek, vagy az a szerint történő cselekvés. Azonban, ha az egyik oldal szereplői több párkapcsolatban is részt vehetnek, akkor már nem feltétlenül optimális stratégia számukra az igazmondás, még akkor sem, ha a mechanizmus rájuk nézve optimális megoldást szolgáltat. Ennek bizonyítására Roth [52] adott egy olyan példát, melyben az egyetemekre nézve optimális stabil kiosztáshoz képest is létezik olyan nem stabil kiosztás, amely kedvezőbb minden egyetem számára. Ha tehát a szereplők egy része összefog, akkor sikeresen manipulálhatja a kapott eredményt.

Még egy furcsaságot ki kell emelni a stabilitási kritérium által implikált kimenetekre nézve. Egy szereplő is tud nagyobb összhasznosságot elérni akkor, ha nem a valódi preferenciája szerint cselekszik.

Példa A következő példában a szereplők hasznosságait adjuk meg az egyes partnerkapcsolatokban (például lehetséges teniszpárok esetén). A C játékos kvótája 2 (ő heti 2 órára szeretne teniszpartnert találni).



$$\begin{array}{ll} u_A(\{A,B\}) = 4 & u_B(\{A,B\}) = 1 \\ u_B(\{B,C\}) = 2 & u_C(\{B,C\}) = 1 \\ u_C(\{C,A\}) = 5 & u_A(\{C,A\}) = 3 \\ u_C(\{C,D\}) = 3 & u_D(\{C,D\}) = 1 \\ u_C(\{C,E\}) = 2 & u_E(\{C,E\}) = 1 \end{array}$$

Láthatjuk, hogy az egyetlen stabil kiosztásban, amikor az $\{A, B\}$, $\{C, E\}$ és $\{C, D\}$ párok alakulnak meg, a C játékos összhaszna 5. Míg a másik kiosztásban, ahol a $\{B, C\}$ és $\{A, C\}$ párok jönnek létre, C összhaszna 6, továbbá mindkét blokkoló párban benne van C. Ez azt jelenti, hogy ha C úgy akarja – vagy mondjuk az eredeti preferenciájához képest az $[A, B, D, E]$ rangsort adja meg a játékmesternek, akkor nagyobb összhasznosságú kimenetet érhet el.

Ezt az ellentmondást feloldhatjuk azzal a feltevéssel, hogy a szereplők össz-hasznosságát nem a hasznosságok összegeként kapjuk meg, hanem a megvalósult párkapcsolatai fordított lexikografikus rendezésével. Vagyis a szereplők preferenciája a kialakult kiosztások felett oly módon származtatható a lehetséges partnerkapcsolatokon értett preferenciákból, hogy minden szereplő azt a kiosztást szereti jobban, amelyben a legutolsó kapcsolata a lehető legjobb. Ezt szokás *maxmin* preferenciának is nevezni.

Másrészről viszont, ha feltesszük, hogy a szereplők nem taktikáznak, nem manipulálnak, vagyis a legjobbnak vélt választ adják az egyes helyzetekben, – ezért csak a tényleges preferenciák szerinti stabil kiosztások jöhetnek létre – akkor az ezen kimenetelekre felállított rangsor minden szereplő részéről jóval egyszerűbb lesz. Megmutatható ugyanis, hogy ha egy szereplő szemszögéből vizsgálunk két stabil kiosztást, akkor különböző párokat csak akkor kaphat, ha a kapacitása telített a stabil kiosztásokban. Továbbá, ha két stabil kiosztásban más párokat kap egy szereplő, akkor belátható, hogy a két párhalmazból a legjobbakat kiválasztva pontosan az egyik stabil kiosztásban szereplő párhalmazt kapjuk. Két stabil kimenet összehasonlításakor ezért nem számít, hogy a szereplő a legjobb pár, a legrosszabb pár, vagy az összhasznosság szerint rangsorol, mert mindegyik ugyanahhoz a rendezéshez vezet.

3.2. Allokációs feladat

Ebben a részben megengedjük, hogy a kapcsolatok többszörös intenzitásúak lehessenek, mindegyik egy adott korlátig. A szereplőkön kívül tehát a lehetséges kapcsolatoknak is kapacitást adunk. *Allokációnak* nevezünk egy olyan kapcsolati rendszert, amelyben semelyik kapcsolat intenzitása nem haladhatja meg a rá adott korlátot, és minden egyes szereplőre teljesül, hogy összeadva azon kapcsolatok intenzitását, amelyekben részt vesz, a szereplő összterhelése nem lehet nagyobb, mint a kapacitása. Allokáció értelmezhető kétszereplős párok és többszereplős társulások esetén is.

Stabilnak nevezünk egy olyan allokációt, amelyben nincs olyan teljesen ki nem használt kapcsolat, melynek szereplői kölcsönösen jól járnának a kapcsolat intenzitásának növelésével (csökkentve ezzel esetleg más kapcsolataik intenzitását). Másként mondva, pontosan akkor stabil egy allokáció, ha minden teljesen ki nem használt kapcsolat intenzitásának növelésében az egyik benne résztvevő szereplő nem érdekelt. A piac egyensúlya azért nem bomlik fel, mert minden kapcsolat intenzitásának növelése meghiúsul egy szereplő ellenérdekeltsége miatt.

Az allokáció modellezéséhez használt gráf (vagy hipergráf) csúcsain illetve élein a kapacitások $b(v)$ illetve $c(e)$ egészértékű függvényekkel adottak. A stabil allokáció tömör leírását a gráf (vagy hipergráf) élein értelmezett, élekhez nemnegatív egészeket rendelő $x_A : E(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *intenzitás-függvénnyel* adjuk meg az alapmodellhez és a kiosztási modellhez hasonlóan:

(A) Allokáció:
$x_A(e) \leq c(e)$ minden $e \in E(G)$-re és
$\sum_{v \in e} x_A(e) \leq b(v)$ minden $v \in V$-re

(S^A) Stabilitás:
minden $e : x_A(e) < c(e)$ élre létezik egy $v \in e$ csúcs, hogy $\sum_{v \in f, f \geq_v e} x_A(f) = b(v)$

Az egyik legfontosabb lehetséges alkalmazás a részmunkaidős foglalkoztatás. Nevezzük most a két oldal szereplőit munkavállalóknak illetve munkaadóknak (vagy egyszerűen dolgozóknak és vállalatoknak). Minden munkavállalónak van munkavállalási kapacitása – mondjuk napi munkaórában kifejezve – illetve minden vállalat megadja, hogy napi hány órában szeretne foglalkoztatni dolgozókat. Egy munkakapcsolat akkor lehetséges, ha kölcsönösen elfogadható mindkét fél részéről. A munkakapcsolatoknak is van kapacitása, egy állás lehet teljes, vagy részidős. Feltesszük, hogy mind a munkavállalók, mind a munkaadók rugalmasak, tehát mindegyik munkakapcsolat létrejöhet részidőben is. A lehetséges munkakapcsolataikat az egyes munkavállalók és az egyes vállalatok is rangsorolni tudják.

Cél a munkaórák stabil allokálása. Ennek feltétele, hogy ne legyen olyan részlegesen kihasznált munkakapcsolat, amelyben mindkét félnek érdeke a munkaóra növelése (esetleg más munkakapcsolataik intenzitásának csökkentése mellett.) Tehát, ha egy munkakapcsolat nem teljes intenzitású, akkor vagy a munkavállalót foglalkoztatják van jobb állásokban a maradék munkaidejében, vagy a munkaadó töltötte fel álláshelyeit jobb munkavállalókkal.

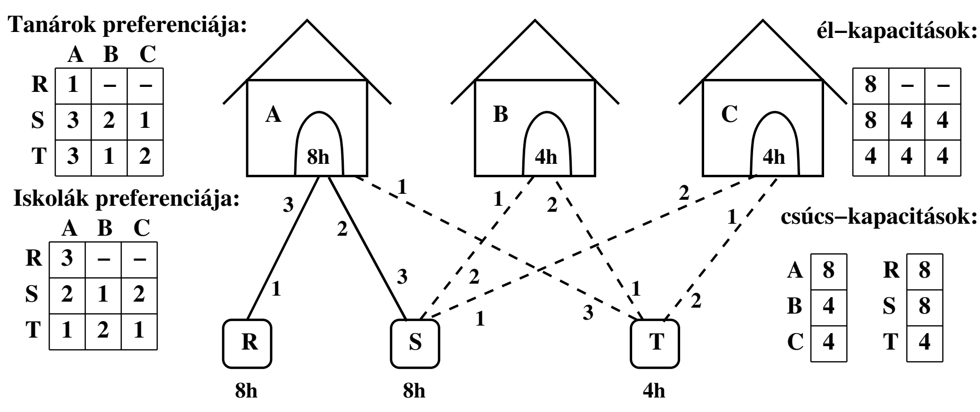
A leánykérő algoritmus általánosítása

Gale és Shapley eredeti algoritmusa erre a modellre is működik. Az első körben minden munkavállaló jelentkezik a számára legelőnyösebbnek vélt munkahelyekre, úgy hogy a felajánlott munkaidők összértéke ne haladja meg a munkára fordítható kapacitását. Ha egy vállalat több munkaórára kap elfogadható ajánlatot, mint amekkora a kívánt foglalkoztatási kapacitása, akkor a legjobb ajánlattevőket tartja csak meg feltételesen, egy jelöltet esetleg részlegesen, a többieket teljesen visszautasítja. Itt is igaz, hogy a munkaadók egyre jobb és jobb jelentkezéseket kapnak, a munkavállalók pedig kénytelenek egyre kedvezőtlenebb állásokra pályázni. Ebből kifolyólag, ha egy munkavállalót teljesen visszautasítanak valahol, akkor oda többet már nem fog jelentkezni, ha pedig részlegesen utasították vissza, akkor nem fog annál több munkaórára jelentkezni oda, mint amennyire felvették.

A kapott megoldás stabil lesz, hiszen ha egy munkakapcsolat nincs teljes mértékben kihasználva, akkor az két okból lehetséges: vagy a dolgozó nem jelentkezett nagyobb idejű munkára azon a helyen, vagy a munkaadó nem tudta őt felvenni hosszabb munkaidőre. Az első esetben a dolgozó biztosan kitölti a maradék munkaidejét jobb állásokban, a második esetben pedig a vállalat utasította vissza valamikor a dolgozót, és mivel egyre csak jobb ajánlatokat kaphat az algoritmus során, ezért a végső allokációban sem érdeke a munkás nagyobb intenzitású foglalkoztatása, hiszen továbbra is jobb dolgozókkal tölti be az álláshelyeit.

Lássunk erre egy példát, amely egy olyan munkaerő-piacot szimulál, amelyben lehetőség van félállás betöltésére is.

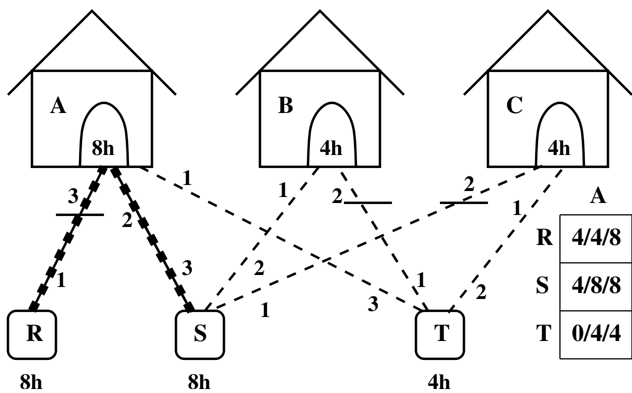
Példa Három iskolában (A, B, C) írtak ki álláshelyeket, amelyekre három jelentkező (Rozi, Sára és Tibor) pályázik. Ismerjük, hogy melyik állás teljes vagy részmunkaidős, és a jelentkezők napi munkavállalási kapacitását. Emellett a jelentkezők és az iskolák preferenciája adott a lehetséges munkakapcsolatokon. Feltesszük, hogy mind a jelentkezők, mind az iskolák rugalmasak, és egy teljes munka helyett két félállást is elvállalnak illetve meghirdetnek.



5. Ábra. A preferenciák és kapacitások

Sára például mindhárom iskolában tanítana, teljes munkaidőben szeretne dolgozni, az iskolák közötti preferenciája pedig: $[C, B, A]$.

Az algoritmus során a következő lépések történek:
1.kör: Rozi: $R \longrightarrow A(8)$, Sára: $S \longrightarrow C(4)$, $S \longrightarrow B(4)$, Tibor: $T \longrightarrow B(4)$
(Tehát például Sára félállásra jelentkezik a C és B iskolákba.)
A B iskola félállására ketten is jelentkeztek, Tibor lett visszautasítva.
2. kör: Tibor: $T \longrightarrow C(4)$
A C iskolába ketten is jelentkeztek, Sára lett visszautasítva.
3. kör: Sára: $S \longrightarrow A(4)$
Az A iskolába összesen másfél állásra érkezett pályázat, ebből Sára ajánlatát elfogadja az iskola, Rozit viszont így a megpályázott teljes állás helyett csak félállásban tudják alkalmazni.
Nincs több ajánlattétel, az algoritmus véget ér.



	A	B	C
R	4/4/8	–	–
S	4/8/8	4/4/4	0/0/4
T	0/4/4	0/0/4	4/4/4

6. Ábra. A kapott eredmény

A kapott allokáció stabil. Ha például Tibor és az A iskola közötti munkaviszonyt vesszük, akkor az azért nem jött létre, mert Tibor nem is jelentkezett oda, ugyanis felvették egy jobb iskolába, félállásba. Sára és a C iskola között sem jött létre munkakapcsolat, mert Sára jelentkezését elutasították, és valóban, az algoritmus végén is jobb jelentkezővel töltötte be az iskola a félállást. Sára és az A iskola viszonyát tekintve, a munkakapcsolat nincs teljesen kihasználva. Ennek oka, hogy Sára a maradék 4 órájában egy kedvezőbb helyen (a B iskolában) tanít. Rozi és az A iskola közötti foglalkoztatás sem teljes intenzitású. Itt az iskola nem szeretné több időben alkalmazni Rozit, mert a másik 4-órás álláshelye egy jobbnak ítélt tanár, Sára által került betöltésre.

A korábbi esetekhez hasonlóan igaz a következő tétel:

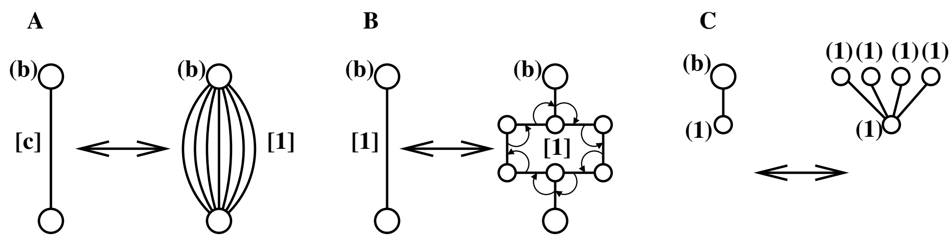
3.3 Tétel *A stabil allokációs problémának kétoldali párosítás-piacok esetén mindig van megoldása.*

Szintén igazolható a két oldal ellenérdekeltsége és az is, hogy minden szereplő azonos összintenzitással vesz részt a stabil allokációkban, illetve a megoldások struktúrája is ugyanolyan mint a korábbi kétoldali esetekben[13].

Visszavezetés konstrukciókkal[14]

Az algoritmusok hasonló működése és a megoldások struktúrájának azonossága legegyszerűbben talán a konstrukciós visszavezetéssel igazolható. Ennek lényege, hogy párosítás-piacokon minden stabil allokációs problémára konstruálható egy olyan stabil párosítási probléma, melynek minden stabil megoldásából szerkeszthető egy stabil allokáció az eredeti feladatra, illetve minden stabil allokáció megfeleltethető egy stabil párosításnak az új problémára.

A konstrukció során a következő három lépést hajtjuk végre:



7. Ábra. Alkalmazott konstrukciók

Az A lépésben az allokációs feladatból kapunk kiosztási feladatot egyszerűen annyi darab párhuzamos élre cserélve a gráf egy élét, amekkora az él kapacitása, $c(e)$ volt. A B lépésben minden élre „ráültetünk" egy 6-hosszú kört. Ennek célja, hogy a C lépésben végre tudjuk hajtani a csúcsosztást, ahol minden pontból annyi másolat keletkezik, amennyi a pont kapacitása, $b(v)$ volt. Ezen utolsó lépés, amely során egy kiosztási feladatból párosítási feladatot kapunk csak akkor hajtható végre, ha minden él egyik végén a pont kapacitása 1 (ezért fontos tehát a B lépés, de például olyan esetben, amikor a kétoldali párosítás-piac egyik felén a szereplők kapacitása 1, – mondjuk az egyetemi felvételi esetén – ez a lépés elhagyható). A preferenciák természetesen adódnak: két különböző párkapcsolat másolatait ugyanúgy rangsorolja minden szereplő, a másolatok közötti sorrend pedig adódhat a másolatok egy tetszőleges sorszámozásából.

[13]Erről részletes leírást találhat az Olvasó Baïou és Balinski cikkében [6].

[14]A visszavezetések leírása megtalálható Cechlárová és Fleiner [13] munkájában.

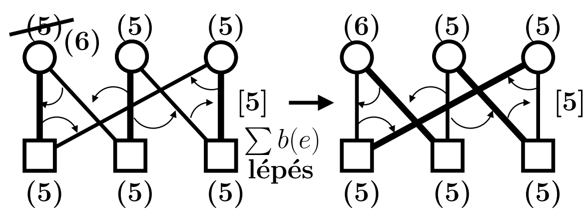
Az algoritmus futásideje

Fontos kérdés, hogy egy nagy méretű feladatra is gyorsan tudjon lefutni a használt algoritmus, illetve allokációs probléma esetén rendkívül előnyös, ha az alkalmazott mechanizmus lépésszáma nem függ a szereplők és párkapcsolatok kapacitásától.

Általános elvárás az alkalmazott algoritmussal szemben, hogy a feladat inputjának függvényében polinom időben vezessen megoldásra. Ha a kapacitások is változók lehetnek, akkor az ettől függetlenül polinomiálisan működő algoritmusokat *erősen polinomiálisnak nevezzük.*

Lássunk egy példát arra nézve, hogy a Gale-Shapley algoritmus futásideje nem erősen polinomiális, a futásidő függhet a kapacitásoktól:

Példa Az első példában minden vállalat és dolgozó kapacitása azonos, mondjuk 5 és ugyanennyi a lehetséges munkakapcsolatok kapacitása is. Minden d_i dolgozó a v_i vállalatot preferálja a v_{i+1} vállalathoz képest és a többivel nincs kapcsolatban. A v_i vállalat viszont elsősorban a d_{i-1} dolgozót preferálja és csak másodsorban a d_i-t (ha például 3 a vállalatok és a dolgozók száma, akkor az indexek modulo 3 értendők). Ebben az esetben a Gale-Shapley algoritmus egy körben véget ér, hiszen a dolgozók mind az 5 kapacitásukkal a számukra kedvezőbb vállalatokhoz jelentkeznek, akik viszont senkit sem utasítanak vissza, ugyanis egyik vállalatnál sincs túljelentkezés.



8. Ábra. Egy példa a hosszú futásidőre

A második esetben a feladat csak annyiban változik, hogy egy dolgozó, mondjuk d_1 kapacitását 1-el megnöveljük. Az első körben ezért ő 5 munkaórára jelentkezik a v_1 vállalathoz és 1 munkaórára a v_2 vállalathoz. A v_2 vállalatnál így túljelentkezés lesz, a felajánlott 6 munkaórából egyet visszautasít, mégpedig a rosszabb jelentkező, d_2 ajánlatából. A második körben így d_2 kénytelen az 1 szabad kapacitásával v_3 vállalathoz jelentkezni, ahol túljelentkezés lesz, és így tovább. Könnyen meggondolható, hogy ha kétszer-három szereplős a piac és minden kapacitás 5, akkor 15 körig fut futni az algoritmus. (Végeredményként minden vállalat a jobb dolgozót kapja meg teljes munkaidőben.) Ha a kapacitásokat $b(v) = c(e) = k$-ra változtatjuk, akkor a futásidő $3 \cdot k$ lesz, tehát az algoritmus lépésszáma függ a kapacitásoktól, az algoritmus nem erősen polinomiális.

Ennek kiküszöbölésére Baïou és Balinski egy dinamikus algoritmust konstruált [6], amely javítóutas módszerrel dolgozik, és futásideje nem függ a kapacitásoktól.

Fél- és tört-megoldások létezése[15]

Ahogy azt kiemeltük a kapacitás nélküli esetekben, stabil párosítás problémának mindig létezik stabil fél-megoldása, a stabil társulás problémának pedig stabil tört-megoldása. Ugyanez az állítás igaz a kapacitásos esetekre is. Ennek legszebb bizonyítéka, hogy a legáltalánosabb eset, vagyis a stabil tört-allokáció létezése a kapacitásos társulás problémában, közvetlenül adódik Scarf [67] tételéből.

Formális leíráshoz célszerű ismét a kiosztást és allokációt leíró függvényeket használni. A fél-egész, illetve a tört-megoldások hasonlóképpen definiálhatók a gráfok illetve hipergráfon élein értelmezett függvények értékkészletének a nemnegatív „fél-egészekre” illetve a racionális számokra történő kiterjesztésével. Ekkor az (K), (S^K) illetve az (A), (S^A) feltételek változatlan formában írják le a stabil fél- és tört-kiosztásokat illetve a stabil fél- és tört-allokációkat.

Gráfok esetén a stabil fél-kiosztás és fél-allokáció létezése igazolható konstrukciókkal történő visszavezetéssel is teljesen hasonlóképpen, mint az egész megoldásokra.

Végül, egy fontos megjegyzés, hogy a stabil allokációs feladatok rendelkeznek a *skálázhatósági tulajdonsággal*. Ez egyszerűen azt jelenti, hogy ha egy feladatban minden kapacitást egy adott konstanssal felszorzunk, akkor az új feladat minden stabil tört-allokációjából kölcsönösen egyértelműen kaphatunk egy stabil tört-allokációt az eredeti feladatra, az adott konstanssal történő leosztás révén. Például, ha egy stabil párosítási feladat minden kapacitását 2-vel megszorozzuk, akkor a kapott stabil allokációs feladat minden egész megoldása kölcsönösen egyértelműen megfelel az eredeti feladat egy stabil fél-párosításának. Hasonlóképpen, minden stabil társulás feladatra létezik olyan konstans, amellyel felszorozva a kapacitásokat, a kapott stabil allokációs feladatnak létezik egész megoldása, mely kölcsönösen egyértelműen megfelel az eredeti feladat egy stabil tört-partíciójának.

[15] Ennek részletes leírása megtalálható matematikus diplomamunkámban [7].

4. További általánosítások

Ebben a fejezetben megemlítünk néhány természetes általánosítási lehetőséget. Ezek elméleti szempontból is érdekes, gyakran nagy bonyolultságú feladatokhoz vezetnek, emellett sok esetben reálisabb modellt szolgáltatnak egyes gyakorlati alkalmazásokhoz.

4.1. Nem szigorú preferenciák

Alapmodelljeinkben mindvégig feltettük, hogy a szereplők preferenciái a lehetséges partnerkapcsolataikon szigorúak. Abban az esetben, ha megengedjük a preferencia-egyezéseket a feladat jellege nagy mértékben megváltozhat. Az első fontos kérdés, hogy miként értelmezzük ekkor a stabilitást, vagyis mely szereplők alkotnak blokkoló párt (vagy társulást).

a) Ha azt követeljük meg, hogy a blokkoló kapcsolatban minden szereplő határozottan jobban járjon, akkor egy blokkolásmentes megoldást *gyengén stabilnak* nevezünk.

b) Ha azt követeljük meg, hogy a blokkoló kapcsolatban legalább az egyik szereplő járjon határozottan jobban, a többiek pedig ne járjanak rosszabbul, akkor a blokkolásmentes megoldás *erősen stabil*.

c) Végül, ha az is blokkoló kapcsolatnak számít, amelyikben mindenki csak legalább olyan jól jár, mint egy adott megoldásban, akkor a blokkolásmentességet *szuper-stabilitásnak* hívjuk.

A legérdekesebb és az irodalomban legtöbbet tárgyalt kérdés a gyenge-stabilitás. Sok esetben – például a stabil szobatárs problémában – annak eldöntése, hogy létezik-e gyengén stabil megoldása a feladatnak bizonyítottan nehézzé válik, nagy valószínűséggel nem oldható meg polinom időben. Könnyen meggondolható, hogy akkor és csakis akkor létezik gyengén-stabil megoldása egy feladatnak, ha a preferencia-egyezéseknek van egy olyan feloldása a szereplők részéről, amelyben (már a szigorú rendezésre nézve) létezik stabil megoldás.

Megjegyzem, hogy ha csak az összes játékos alkothat blokkoló társulást, akkor a stabilitás fenti formáit kielégítő megoldásokat (hasonló jelzőkkel) *Pareto-optimális* megoldásoknak hívjuk. Az általunk használt stabilitási kritériumok tehát sokkal többet követelnek meg az oly gyakran hivatkozott Pareto-optimalitás feltételénél.

4.2. Többféle aktivitás

Természetes feltevés, hogy a szereplők egy csoportja ne csak egyféleképpen tudjon együttműködni. Életszerű Cechlárová és Ferková példája [12] a repülőgép-pilóták párosításáról. Itt ugyanis egy pár beosztásakor igen eltérő lehet a kapcsolat megítélése a pilóták részéről attól függően, hogy melyiküket tették meg első- illetve másodpilótának. Hasonlóképpen két lehetséges kapcsolat lehet két sakkjátékos között egy sakkverseny egy fordulójában, attól függően, hogy ki játszik világossal.[16] Szintén két lehetséges kapcsolat jöhet létre hazánkban egy diák és az egyetem egy szakja között, hiszen költségtérítéses és államilag finanszírozott formában is igénybe lehet venni az oktatást. A játékelmélet egy klasszikus példája a házaspár esete, ahol a férj inkább a focimeccsre a feleség pedig balettre menne, de persze leginkább egymás társaságában.

Meggondolható, hogy többféle együttműködés jöhet létre pusztán aszerint is, hogy az egyes szereplők mekkora erőfeszítést fordítanak a kapcsolatra. Illetve ennek egyszerűsített változataként, a szereplők átváltható hasznosságú jószág átadásával, transzferrel szintén tetszőleges mértékben módosíthatják egymás hasznosságát egy kapcsolatban. Megjegyezzük, hogy a folytonosan változó elérhető hasznosságok halmaza jól közelíthető diszkrét kimenetekkel.[17]

A következő ábrán egy pár lehetséges együttműködéseinek négy esetét mutatjuk be, a kapcsolódó személyes hasznosságok megjelenítésével. Az első esetben csak egyfajta együttműködés lehet a két fél között. A másodikban kétféle. A harmadikban sokféle lehet, az elérhető hasznosságok akár folytonosan is változhatnak, ezt közelíthetjük véges sok lehetséges kimenettel. Végül a negyedik példa az átváltható hasznosságú esetet mutatja, ahol a két fél együttműködésének van egy maximális összhaszna, amelyet eloszthatnak egymás között tetszőlegesen.

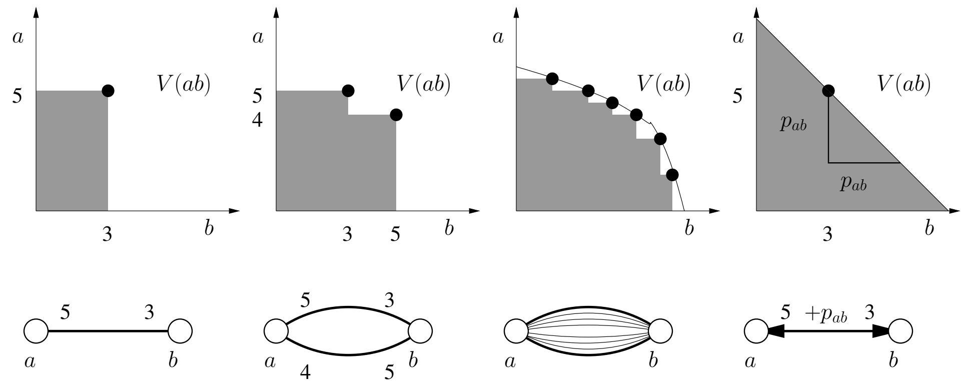
A többféle együttműködést párkapcsolatok esetén párhuzamos élek behúzásával tudjuk modellezni, ha gráffal reprezentáljuk a kapcsolati rendszereket.

4.3. Kiválasztási függvények

Egy szereplő preferenciája a partnerkapcsolatok egy halmazán igen változatos lehet. Egy munkahely például, ahol mérnököket és közgazdászokat foglalkoztatnak eltérően választhat egy újonnan jelentkező közgazdász és mérnök között aszerint, hogy a vállalatnak épp melyikükre van szüksége, és csak

[16] A sakkversenyek párosító-programjairól a 7.1 alfejezetben írok.

[17] Lásd bővebben Scarf [68] munkáját.



9. Ábra. Hasznosságfüggvények egy párkapcsolatban

másodsorban figyelembe véve a két jelölt egyéni kiválóságát. Sok iskolában külön szabályokkal igyekeznek elérni, hogy a felvett diákok eloszlása minél homogénebb legyen, mind nemzetiségi, mind területi vonatkozásban. Tehát a felvételről nem kizárólag a jelentkezők teljesítménye alapján döntenek, hanem más szempontoknak is adhatnak prioritást.

Roth és Sotomayor [59] a munka-piac stabilitását vizsgálva vezetette be a kiválasztási függvények egy fontos osztályát. Amennyiben v egy vállalat és D a dolgozók egy halmaza, akkor jelöljük $C_v(D)$-vel a v vállalat által a D jelentkezők közül kiválasztott dolgozók halmazát. Azt mondjuk, hogy a v vállalat preferenciája a dolgozók halmazán *behelyettesíthető*, ha $d \in C_v(D)$-ből következik, hogy $d \in C_v(D \setminus d')$, vagyis ha a vállalat kiválaszt egy jelentkezőt a dolgozók egy halmazából, akkor azt az egy eggyel kisebb halmazból is kiválasztja.

Ebben az esetben *dolgozó-vállalat stabilnak* nevezünk egy K kiosztást, ha minden létre nem jött $\{d, v\}$ munkakapcsolatra igaz, hogy vagy a d dolgozót vették fel egy számára kedvezőbb állásba, vagy – a v által felvett munkásokat $K(v)$-vel jelölve – $d \notin C_v(K(v) \cup d)$, vagyis d jelentkezését v elutasítaná. A fent említett cikkben megmutatták, hogy ha minden vállalat preferenciája behelyettesíthető, akkor mindig létezik dolgozó-vállalat stabil kiosztás.

Fleiner [23] a következőképpen általánosította a fentieket a kiosztási modell azon változatára, ahol mindkét (A és B) oldalon több párt is választhatnak a szereplők. Legyen egy $u \in A$ szereplő választása egy $X \subseteq B$ halmazból $C_u(X) \subseteq X$. *Monotonnak* nevezünk egy f kiválasztási függvényt, ha bármely $X \subseteq Y \subseteq B$ halmazokra $f(X) \subseteq f(Y)$ teljesül. Egy C_u kiválasztási függvény *co-monoton*, ha létezik egy f monoton függvény, melyre $C_u(X) = X \setminus f(X)$ minden $X \subseteq B$-re. Gyakorlatban ez a tulajdonság úgy értelmezhető, hogy ha egy vállalat az X dolgozói csoportból nem választ ki valakit, akkor egy ennél bővebb Y dolgozói csoportból sem fogja azt a személyt kiválasztani.

A *kiválasztási stabilitás* hasonlóképpen definiálható, mint a dolgozó-vállalat stabilitás. Egy K kiosztás pontosan akkor lesz ilyen értelemben stabil, ha minden megvalósulatlan párkapcsolatra, vagyis minden $\{u, v\} \notin K$-re vagy $u \notin C_v(K(v) \cup u)$ vagy $v \notin C_u(K(u) \cup v)$, tehát vagy az egyik vagy a másik fél nem érdekelt a kapcsolat létrejöttében.

Fleiner megmutatta, hogy ha minden kiválasztási függvény co-monoton, akkor kétoldali párosítás-piacon mindig létezik – a kiválasztási függvényekre nézve – stabil kiosztás. A megoldások megkaphatók az eredeti Gale-Shapley algoritmus természetes általánosításával.

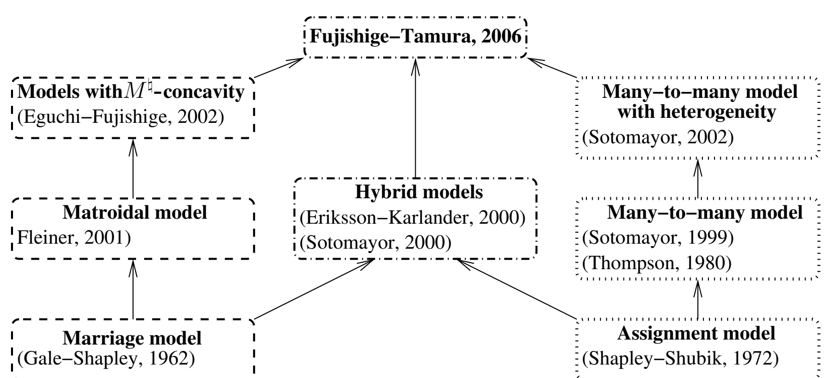
A bizonyításban kiderül, hogy a Gale-Shapley algoritmus helyességét Tarski fixponttétele implikálja. Sőt, ennek következménye, hogy a stabil megoldások ebben az esetben is egy teljes disztributív hálót alkotnak.

Megjegyzem, hogy mind Fleiner, mind Roth és Sotomayor modellje speciális esetként tartalmazza a klasszikus stabil kiosztási feladatot. Hiszen, a kapacitást kitöltő legjobb ajánlatok elfogadása behelyettesíthető kiválasztási függvényt jelent, egy behelyettesíthető függvény pedig mindig co-monoton.

4.4. Vegyes modellek

Többen vizsgálták azt a realisztikus kérdést, hogy miként jellemezhető az a párosítás-piaci modell, amelyben a kifizetéseket megengedő és meg nem engedő párkapcsolatok egyszerre vannak jelen. A kapcsolatokat *rugalmasnak* illetve *rugalmatlannak* nevezzük az első illetve a második esetben.

A kérdéskör általam ismert legátfogóbb modelljét Fujishige és Tamura [26] adta, melyben diszkrét konkáv hasznosságfüggvények mellett engednek meg kifizetéseket bizonyos párok esetén. Ebben a cikkben a következő ábrával foglalják össze a kérdéskör fontosabb modelljeit kétoldali piacokra:



10. Ábra. A kétoldali párosítás-piacok modelljeinek hierarchiája

5. Kooperációs mechanizmusok

Az emberek közti kapcsolatok, mikro- és makrofolyamatok leírása a társadalomtudományok alapfeladata. Az emberi közösségek fejlettségét minden szinten – értsük ezalatt egy társasház lakóit, egy ország népét, vagy az egész emberiséget – az határozza meg, hogy tagjai miként képesek együttműködni.

A kapcsolatok első számú mozgatórugója az ösztön. Az együttműködés, – ahogy az állatvilágban is igen változatos formában megfigyelhető – génjeinkben van kódolva. A párkapcsolatok kialakítása, az utódgondozás mindannyiunkban elemi késztetés. Az emberiség fejlődésében második lépcsőként jelent meg a vezérelvű irányítás. Ennek során a kiválasztott – törzsfőnök, fáraó, király vagy diktátor – egy személyben jogosult a társadalmi együttműködések szabályozására. Jelen korunk domináns társadalmi berendezkedésében, a demokráciában a hangsúly az egyének szabad választásán alapuló kapcsolatokra helyeződött. Az együttműködések keretrendszerét – a társadalom értékrendszerén alapuló, képviselőkön keresztül megvalósuló – bürokratikus koordináció biztosítja.

Ennek a fejezetnek a célja nem kevesebb, mint átfogó leírást adni az emberek közti kooperációk okairól és lehetséges formáinak szabályozásáról. A dolgozatban eddig használt terminológia szerint feladatunk annak meghatározása, hogy bizonyos típusú társadalmi kapcsolatokban miként alakul ki a szereplők által megvalósítható együttműködések, az elérhető hasznosságok halmaza.

A gazdasági kapcsolatok koordinációs mechanizmusainak egy lehetséges rendszerezését Kornai János [41] alkotta meg. Hasonló szellemben, de némileg módosított fogalmi keretben szeretnék egy új általános osztályozást javasolni a lehetséges kapcsolatok és azok szabályozásának leírására. Ennek jellegét több példán keresztül igyekszem szemléltetni. Végül a konkrét megvalósult, vagy megvalósulásra váró centralizált párosító-programokat, mint hasznos bürokratikus szabályozásokat mutatom be, és helyezem el a felvázolt elméleti keretben.

5.1. Koordinációs mechanizmusok

Kornai János [41] a szovjet-típusú és a kapitalista rendszerek leírásának céljából vezette be a koordinációs mechanizmusok fogalmát. A mikrofolyamatok szabályozásának, vagyis a koordinációnak négy mechanizmusát különbözteti meg: a bürokratikus, a piaci, az etikai és az agresszív koordinációt. Chikán [17] a következőképpen foglalta össze a mechanizmusok jellemzőit:

„A *bürokratikus mechanizmus* működésében a szereplők kapcsolatait alá és fölérendeltség jellemzi. A cselekvésre az aktuális hatalmi viszonyok között jogilag szabályozott módon és mértékben utasítások késztetetik a hierarchia alacsonyabb szintjén lévőket. A kapcsolatok lehetnek pénzalapúak, monetarizáltak, de nem feltétlenül azok.

A *piaci mechanizmus* érvényesülésekor a szereplők egyenrangúak, kölcsönös előnyszerzés céljából, önként lépnek kapcsolatba egymással, a szabályok közös érdekre épülő betartásával. A kapcsolatok monetarizáltak, a pénz jelenlétére épülnek.

A szereplők *etikai koordináció* esetén is egyenrangúak és saját jószántukból vesznek részt a folyamatokban. Az erre való késztetés lehet egyoldalú, vagy kölcsönös, a viszonosság elvén nyugvó. Az etikai koordinációban a pénz nem játszik közvetlen szerepet.

Az *agresszív koordináció* szereplői nem egyenrangúak: a szabályozás a koordinátor nyers erőfölényére épül. A pénz megjelenthet, de ez nem szükségszerű.

Bármely társadalomban ezen koordinációs mechanizmusok valamilyen keveréke működik, de többnyire azonosítható egy domináns koordináció. Modern társadalmunkban ez vagy a bürokratikus, vagy a piaci koordináció."

Kornai metodikájának elsődleges célja az akkori két versengő rendszer összehasonlítása, előnyeinek, hátrányainak vizsgálata. Eredménye pedig a piaci koordináció szükségszerű dominanciájának igazolása a gazdaságban. Megjósolta, hogy a bürokratikus rendszerekben kódolt gyengeségek, a hiány törvényszerű léte, vagyis az alapvető – és ezért megreformálhatatlan – rosszulműködés a szovjet-típusú rendszerek vereségéhez vezet.

Elméleti megközelítése azóta több kutatót inspirált[18], hiszen fogalmi rendszere remekül alkalmazható nem csak gazdasági, hanem mindenfajta társadalmi kapcsolatrendszer leírására tetszőleges közösségi szinteken.

Mindezek ellenére – a koordinációs mechanizmusok eredeti osztályozása mellett és helyett, ahhoz igen hasonlatosan – szeretnék egy másik, egyszerű fogalomrendszert használni a társadalmi kapcsolatok formáinak, szabályozásának leírására. Ennek okát, az új fogalmak bemutatása után fogom kifejteni.

5.2. A kapcsolatok és szabályozások osztályozása

A kapcsolatok lehetséges formáinak kialakulását a következőképpen rendszerezem. Egyrészt két alapvető együttműködési formát definiálok:

[18] Ezek közül érdemes kiemelni Chikán [15] [16] és [17] munkáit, amelyekben a globális gazdasági folyamatokat jellemezte Kornai koordinációs mechanizmusainak segítségével.

a) *Szabad választás:* A szereplők együttműködésének alapvető tere. Mindenki szabad elhatározásból, önérdekét követve vesz részt a társulás adott formájában. A kooperációból származó hasznosság is tetszőleges módon osztható fel, vagyis transzfer a szereplők között alapvetően lehetséges. A szereplők viszonya mellérendelt.

b) *Utasítás:* Itt egy szereplő (vagy a szereplők egy halmaza) kényszeríti a másik (vagy a többi) szereplőt valamilyen kapcsolatra, közös tevékenységre. Az utasítást adó dönthet a közösen elért haszon esetleges elosztásáról is. A szereplők viszonya alá-fölérendelt.

Másrészt, a fenti kapcsolatok szabályozásának két alapformája a következő:

1. *Törvényi keret:* (avagy írott szabályok) A szereplők által közösen elfogadott játékszabályok, melynek betartása minden szereplőre nézve kötelező érvényű és kikényszeríthető. A keretrendszer meghatározhatja, hogy mely szereplők, milyen konkrét együttműködéseket alakíthatnak ki, beleértve ebbe a közösen elért haszon elosztásának mikéntjét, a transzferek esetleges megtiltását is. A lehetséges együttműködések terét szűkíti, alakítja.

2. *Etikai norma:* (avagy íratlan szabályok) A szereplők kapcsolatainak finom szabályozója és egyben ösztönzője, mely közvetlenül ki nem kényszeríthető. Megfelelhet a társadalmi értékrendnek, szokásoknak, közösségi elvárásoknak.

Az eltérésnek két fő magyarázata van. Az egyik, hogy jellemzően nem gazdasági problémákra kívánom alkalmazni a leírást, ezért oldom fel a piaci koordináció monetarizáltságának feltételét, és helyette – a transzfert továbbra is megengedő – szabad választást használom. A másik eltérés, hogy az általam alkalmazott fogalmi rendszerben a bürokratikus koordináció eredeti jelentését kettébontom. Külön veszem a törvényi szabályozást, amely szintén egyfajta utasítás, de a játékosok által elfogadott és – az általam vizsgált modellekben – rögzített, változatlan. Ennek indoka, hogy korunkban egyre több országban – így hazánkban is – a demokratikus jogrend kereteiben a törvényalkotás (mint a többség által jóváhagyott társadalmi játékszabályok kialakítása) egyre inkább különválik végrehajtó hatalom utasításokon alapuló irányításától.[19]

Az etikai koordináció és az etikai normák lényegében ekvivalensek. Az új fogalmak között az agresszív koordináció olyan utasításnak felel meg, amelyet sem törvény, sem etikai norma nem indokol. De rengeteg példa adható

[19]A demokratikus kontrollt számos intézmény – az állami számvevőszéktől az ombudsmanokig – hivatott képviselni, de számos példát láthattunk már hazánkban is arra, hogy állampolgárok közvetlenül fordultak jogorvoslatért bírósághoz az állammal szemben.

olyan utasításos viszonyra, amely etikailag, vagy törvény szerint is elfogadott. A legegyszerűbb a rendőri intézkedésre gondolni, ahol a kényszer alkalmazása a jogi kereteken belül megengedett. Egy vállalaton belül a főnök-beosztott együttműködés is klasszikusan utasításokon alapul. Igen érdekes problémakör a gyereknevelés, ahol a szülő-gyerek vagy tanár-diák viszonyban megjelenő utasítások nagy része etikailag elfogadható és meglehetősen kevés írott szabályozás vonatkozik rá.

Az általam későbbiekben vizsgált modellekben elsősorban a szabad választás jelenik meg, mégpedig kifizetések nélkül. Előzetesen megemlítem a társas kapcsolatok talán legfontosabbikát, a párválasztást. De több fontos példát lehet még hozni a közvetlen transzfert nélkülöző kapcsolatok kialakítására, hazánkban mondjuk az egyetemi felvételt vagy a körzeti orvos megválasztását.

Lássunk most néhány példát a fenti leírásmódok használatára konkrét együttműködési helyzetekben.

- **Áru-csere** A gazdasági tevékenységek alapja, ennek szabályozása közvetlenül meghatározza a gazdaság jellegét. Kornai szóhasználatában a szovjet-típusú rendszerekben a gazdasági folyamatok, és így az árucsere is dominánsan bürokratikusan koordinált volt. Másként mondva, a gazdasági mikrofolyamatok központi terveken alapuló utasítások alapján működtek. A piacgazdaságban ezzel szemben a domináns koordináció a piaci. Az áruk cseréje és a kifizetések mértéke a felek szabad választásán alapul. Törvényi szabályozás és etikai normák azonban a legliberálisabb gazdaságban is fontos kiegészítő szerepet töltenek be.[20]

- **Élődonoros szerv-csere**

  Abban az esetben, ha a csere tárgya egy élő emberi szerv, akkor teljesen más megítélés alá kerülhet a tranzakció. Bár feltételezzük, hogy mindig a szereplők szabad elhatározása szerint történik a donáció, a fejlett országok mindegyikében tilos a szervek pénzért történő

[20] Egyes termékek kereskedelmét akár tilthatja is (vagy csak adott személyek, mondjuk kiskorúak részére). A fogyasztóvédelmi, környezetvédelmi, egészségügyi és még sok egyéb szabályzatot be kell tartania a termék gyártójának. Nem lehet visszaélni az erőfölénnyel vagy tiltott árukapcsolást végezni. A kötelező szabályokon kívül azonban rengeteg etikai normát is fel lehet sorolni: nem árulhatjuk a terméket erőszakosan, nem vezethetjük félre a vásárlót. Az etikai elvárások nagy többsége ez esetben is idővel törvényi szabályozássá alakul.

átadása, de sok fejletlen országban gyakorlatilag lehetőség van erre.[21] A világ nagy részében viszont megengedett, és igen gyakran alkalmazott eljárás a családon belüli személyek közötti szervátültetés. De ki számít családnak? A testvér igen, de az unokatestvér már nem biztos, a házastárs igen, de az élettárs még nem? Rengeteg kérdés még megválaszolatlan, a társadalom értékítéletére vár. Várhatóan a demokratikus jogrendszerekben ez a szabad választáson alapuló különleges kapcsolat teljeséggel mentes lesz a kifizetésektől, és pontos, egységes törvények határozzák meg majd azt is, hogy kik között jöhet létre a donáció.

- **Elsőbbség megadása a közúti forgalomban**

  Egy kereszteződésben találkozó járművek vezetői közül az egyik várakozásra utasíthatja a többit. Ennek szabályai pontosan meg vannak határozva a KRESZ-ben[22]. Ettől eltérni azonban az etikai normák szerint is indokolt lehet (beengedni valakit a sávba, vagy előre engedni egy hátrányosabb helyzetben lévőt). Ha azonban sem a szabályoknak sem a vezetési szokásoknak nem megfelelően kényszerítenek valakit az elsőbbség megadására, akkor az önkényes sofőr agresszív koordináció szerint jár el. Kornai ezzel a példával szemléltette, hogy hatékonysága miatt a bürokratikus koordináció is lehet domináns bizonyos speciális kapcsolati rendszerekben.

- **Párválasztás**

  Kornai rövid megjegyzése szerint ebben az esetben az etikai koordináció a domináns. Ez igaz, de talán érdemes kicsit bővebben is megvizsgálni a kérdést. Napjaink haladónak mondott kultúráiban a párválasztás a két fél szabad akaratán alapul. A kifizetés (hozomány) etikailag nem elfogadott (bár törvény szigorúan ezt legtöbbször nem szabályozza). Tilos viszont több házasságban részt venni egyszerre. Néhány országban viszont már megengedett, hogy egyneműek is létesítsenek „polgári part-

[21] Elitélünk-e erkölcsileg mondjuk egy jómódú európai beteget, hogy ha – gyógyíthatatlan kórtól szenvedve – elmegy Pakisztánba és egy egészséges, de igen szűkös anyagi körülmények között élő embertől, számára jelentős ellenérték fejében megkapja az egyik veséjét?

[22] Megjegyzem, hogy a KRESZ szabályrendszere is egy hasonló alapelven nyugszik, mint a stabil párosítás. Hiszen csupán azt kell tisztázni, hogy ha két jármű pályája keresztezi egymást, akkor kettejük közül kinek van elsőbbsége, kinek az útvonala dominálja a másikét. Ebből ugyanis következik, hogy egy tetszőleges forgalmi helyzetben az (vagy azok) indulhatnak először, akikkel szemben nincs senkinek elsőbbsége, vagyis a dominálatlan útvonalakon haladók.

neri viszonyt".[23] Nem volt ez mindig így a történelem során, és ma is találhatunk számos ettől eltérő etikai és törvényi szabályozást a világban. Indiában például a mai napig általános szokás, hogy a szülők utasítják gyermekeiket az egybekelésre, és többnyire a hozomány is a szülők megegyezésének tárgya. A muszlim kultúrákban megengedett a többnejűség, de a törvény a feleségek számát limitálhatja. Igen fontos kérdés továbbá a férj-feleség viszony szabályozása. Az egyenjogúság, vagyis a közös akaraton alapuló szabad választás a liberális elvű kultúrákban mind etikailag, mind törvényileg egyre jellemzőbbé válik a házastársi együttműködések terében (mind a mindennapi döntések, mind a törvény előtti egyenlőség tekintetében). A múltban, illetve a világ nagy részében ma is, a házastársi kapcsolatok férfiközpontúak, az együttműködések utasításokon alapulnak.

- **Egyetemi felvételi**

  Az egyetemi oktatás szintén egyfajta áru-csere, amely során a diák egy komplex tudáshalmaz birtokába kerülhet. Hosszú időtávú kapcsolat, amely minden évben egy meghatározott időpontban kezdődhet és esetenként megszakítható. Alapvetően két formája létezik: a közvetlen kifizetéses és a kifizetés nélküli. Ez hazánkban az önköltséges illetve az államilag finanszírozott képzésnek felel meg. Lényeges azonban, hogy a kínálati oldalon az egyetemek kapacitása szakonként is korlátozott, ezért törekednek az optimálisnak vélt számú diák felvételére minden évben. Ez elérhető a képzési díj változtatásával a kereslethez igazodva, de – főként ha nincs közvetlen kifizetés – a legtöbb esetben a megoldás a diákok szűrése és a megfelelő számú jelentkezés elfogadása. Probléma adódik viszont abból, hogy a jelentkezés és a szelekció az egyetemek részéről egy időintervallumban történik, ez a piac zavaraihoz vezet.[24] Az egyetem-diák kapcsolat tehát szabad választáson alapul, de a felvételi eljárás koordinációjára hasznos szabályokat lefektetni, és még hatékonyabb lehet egy központi párosító-program alkalmazása.

[23] Több európai országban (Hollandia, Belgium, Spanyolország, Nagy-Britannia, Csehország) és Kanadában is törvénybe iktatták az azonos neműek jogát polgári partneri viszony létesítésére. Ennek nyomán például Nagy-Britanniában közel 5000 pár kötelezte el magát az önkormányzatok anyakönyvezetői előtt (köztük Sir Elton John, híres popsztár is). „A törvény révén a meleg párok is igénybe vehetnek számos kedvezményt. Ezek közé tartozik az elhunyt élettárs utáni nyugdíjjogosultság, adózási előnyök, bevándorlási szempontok, közös örökbefogadási lehetőségek, korábbi kapcsolatokból származó gyermekek adoptálása, kórházi látogatási jog, a legközelebbi hozzátartozó megjelölése vagy az a szabály, hogy nem kell tanúvallomást tenniük egymás ellen a bíróságon." A további részletek megtalálhatók a [78] újságcikkben.

[24] Ezt részletesen kifejtem a 6.3 alfejezetben

Általánosan elmondható, hogy világunkban egyre inkább dominánsak a szabad választáson alapuló kapcsolatok, de a szereplők lehetséges együttműködéseit az etikai normákon alapuló törvényi keretek mind jobban körülhatárolják.

5.3. Mikor optimális a szabályozás?

Akkor, ha hatékonyan valósítja meg a szabályozás célját. De mi a célja a társadalmi és gazdasági kapcsolatok szabályozásának? Általánosan talán azt mondhatjuk, hogy a tartós társadalmi jólét megteremtése, a fenntartható fejlődés. Az persze egy igen bonyolult kérdés, hogy miben mutatkozik meg a társadalmi jólét. A gazdaság fejlettségére nézve léteznek pontos mérőszámok, de az emberek elégedettségét, egyéni hasznosságát elég nehéz meghatározni. Ennél is nehezebb megszabni azt, hogy ebből miként kapjuk meg a társadalom összhasznát. [25]

A szabad választáson alapuló piaci mechanizmusok jellemzője, hogy a benne szereplő egyének maximalizálják a rövid vagy középtávú gazdasági hasznukat. Hátránya lehet, hogy nem biztos, hogy az egyéni racionalitás a szereplők összhasznához vezet, nincs tekintettel a játékból kimaradókra, az externáliákra, továbbá kevésbé fontos a hosszútávú cél, illetve ennek biztonságos elérése. Vagyis a hosszútávú társadalmi jólét helyett elsősorban a rövidtávú egyéni hasznok realizálódnak a piaci mechanizmus révén. Ezért van szükség a bürokratikus és etikai alapú koordinációkra, vagy másképpen mondva a törvényes és etikai normák adta keretek pontos megadására.

Externáliákra a legismertebb és talán legfontosabb példa a környezetszennyezés. A piaci mechanizmus rövidtávú szemlélete legélesebben a pénztőkék mozgásában figyelhető meg, amely sok kárt okozhat lokálisan. Ezzel szemben Pintér [81] az alapoktatást és az egészségügyet hozza fel, amely állami szerepvállalással hosszútávú hasznot jelenthet. A biztonság is csorbát szenvedhet a szabályozatlan liberalizációval, erre jó példa a két éve bekövet-

[25] Ha például 9 embernek van egyenként 100 pénze és egynek 2000 pénze, vagy mind a tízüknek egyenként 200 pénze, akkor az első esetben lesz több a társaság összes pénze, de nagy valószínűséggel a második esetben lesz nagyobb a társaság összhasznossága, ha azt a tagok hasznosságainak összegeként definiáljuk. Erre a jelenségre épít sok ideológia, többek között a kommunizmus eszméje is. Ha azonban a pénzeket ilyen durván újraosztjuk, és ezt várhatóan megismételjük a későbbiekben, akkor a szereplők motiváltsága jelentősen csökken a vagyon felhalmozására nézve, így elvesztik ösztönzésüket a piaci mechanizmusban való részvételre. A gazdaság működésének utasításokkal történő irányítása pedig a történelmi tapasztalat szerint nem hatékony.

kezett New York-i nagy áramszünet.[26]

A szabályozás formája ugyanannak a célnak az elérése érdekében is nagyon sokféle lehet. Ha a törvényi keretek nagyon rugalmatlanok, ha túlzott mértékben korlátozva vannak az egyének a szabad választásban, akkor a piaci mechanizmusok nemkívánatos mértékben lecsökkennek vagy torzulnak, a belőlük származó hasznok elmaradnak. Célszerű a szabályozást amennyire lehet finommá, de rugalmassá tenni, amely ösztönzi a piaci mechanizmusokat, de az együttműködések megvalósulását olyan irányba tereli, amely a hosszútávú társadalmi érdekeket szolgálja. Hadd említsek néhány példát erre.

A szovjet típusú rendszerekben az agráriumban dolgozók együttműködését, a téeszek létrehozását szigorú törvényekkel, központi utasítással kényszerítették ki. Ezzel szemben ma, az Európai Unióban a hasonló jellegű – bár inkább csak a közös értékesítés célját szolgáló – „tészek" létrehozását (főként a zöldség-gyümölcs szektorban) központi támogatásokkal, kedvezményekkel ösztönzik.

A munkavállalói szerződés megkötésekor az állam törvénnyel korlátozhatja a munkáltatók választását, amennyiben tiltja a nemi és nemzetiségi diszkriminációt. Emellett különböző ösztönzésekkel segítheti elő az első munkavállalók, a tartós munkanélküliek, a gyesről visszatérők, illetve a nyugdíj előtt állók foglalkoztatását. A munkaszerződésben foglalt elbocsátási szabályt is alakíthatja, ennek szigorúsága növelheti a munkavállaló biztonságát, rugalmassága viszont serkenti a piaci mechanizmusokat. Ez igen aktuális és kényes kérdés sok európai országban.

A környezetvédelmi előírások szigorúan korlátozhatják, vagy tilthatják bizonyos anyagok, mondjuk az agráriumban használt vegyszerek használatát. De a szabad választás bizonyos szintje megőrizhető például extraadók és kvóták révén. A benzin árába beépített nagy mértékű adók csökkenthetik annak felhasználását, serkenthetik a gazdaságosabb üzemű autók gyártását. A gyárak üzemek károsanyag-kibocsátásában is lehet hagyni bizonyos mozgásteret a piaci mechanizmusok érvényesüléséhez. Ezt jelenleg sok helyen olyan kvótákkal érik el, melyek adás-vétele megengedett.

Törvény szabályozhatja még az egyszemélyes „együttműködéseket" is. Értem ezalatt azt, hogy az ember még saját magával sem tehet bármit. Az egészséget károsító szenvedélyek, elsősorban a kábítószerezés tiltása természetesen az egész társadalom érdekét szolgája, azzal is, hogy kevesebbet kell a közösből költeni a megromlott egészségű beteg kezelésére. Hasonló célzattal emelik meg extraadókkal a legális tudatmódosító szerek, például a cigaretta árát.

Összefoglalva, a szabályozás akkor optimális, ha hatékonyan éri el, hogy

[26] A 8. fejezet végén további példákkal igyekszem ezt a kérdéskört megvilágítani az európai országokat érintő, illetve globális problémák kapcsán.

a szereplők szabad választása útján éppen a hosszútávú társadalmi célok valósuljanak meg. Az ilyen koordinációk jó eséllyel vívják ki a társadalom elismerését, a játékszabályok széleskörű elfogadását.

5.4. Centralizált párosító-programok

Dolgozatom gyakorlati szempontból talán legfontosabb témája, hogy milyen esetekben érdemes bevezetni olyan központi párosító-programokat, amelyek közvetlenül juttatják el a piac szereplőit egy stabil egyensúlyi helyzetbe.

Ezen eljárások felfoghatók olyan törvényi szabályozásnak, avagy bürokratikus koordinációnak, amelyek tiszteletben tartják az egyének szabad választását. Hadd idézzem a témakör – a párosítás-piacok – talán legnevesebb közgazdász szakértőjét, Alvin E. Roth-ot, aki a [53] cikkében a következőket írta a párosító-programokról a kórházi gyakornokok munka-piacával kapcsolatban (saját fordítás):

"Vegyük észre, hogy az itt vizsgált központosított piacok nem jelentenek központi **tervezést**, ahogyan a legtöbben értelmezik, mivel ezek a piacok úgy lettek megalkotva, hogy érzékenyek legyenek a szereplők kifejezésre juttatott preferenciáira, ahelyett hogy egy tervező ezektől független céljainak elérését szolgálnák. Ami itt központosítva van, az nem az elérendő cél, hanem a piaci mechanizmus maga."

Nincs tehát szó utasítási viszonyról. A központosított párosító-programok olyan szabályozási keretet teremtenek, amelyben a szereplők szabad választása hatékonyan juthat érvényre egy világos, mindenki által elfogadott automatizmus révén.

A következő fejezetekben részletesen elemzek olyan párosítás-piacokat, amelyek egy részében már működnek központi párosító-programok, és olyanokat is, amelyekben elképzelhető a bevezetésük a közeljövőben.

6. Kétoldali párosítás-piac

A fejezet során vizsgált piacokban közös, hogy a szereplők két oldalon helyezkednek el és a párkapcsolatok a két oldal szereplői között jöhetnek létre. Feltesszük továbbá, hogy a szereplők között elméleti értelemben nincs kifizetés, gyakorlatilag a kifizetés mértéke előre rögzített – a munka-piacon az állásajánlat kiírásában szerepel a munkabér, az egyetemek esetén a képzési díj előre meghatározott – nem alku tárgya. Ez azt jelenti, hogy minden esetben a stabil kiosztás probléma kifizetés nélküli változatát használhatjuk leíró modellként. Mint látni fogjuk, a gyakorlatban megvalósított párosító-programok ilyen kétoldali piacokon rendkívül fontos szerepet tölthetnek be.

6.1. Munkaerő-piac

A piaci mechanizmusok központi párosító-programok által történő szabályozására általában akkor kerül sor, ha a munkakeresés egyidőben és nagy számban történik. Ilyen helyzet áll elő az egyetemről kijövő első munkavállalók esetében. Bizonyos szakmáknál – elsősorban orvosoknál vagy ügyvédeknél – ez gyakornoki pozíciók betöltését jelenti.

NRMP: Kórházi gyakornokok párosító-programja[27]

A XX. század első felében az Egyesült Államokban elterjedté vált a végzett orvostan hallgatók gyakornoki állásban történő első foglalkoztatása. Ez ugyanis jó lehetőség volt a kezdő medikusoknak és olcsó munkaerő a kórházaknak. Egészen 1945-ig semmiféle szabályozás nem volt ezen a piacon, de az idők folyamán egyre több kedvezőtlen jelenséggel találkoztak a szereplők. A legnagyobb probléma az volt, hogy a diákok szerződéskötése mindinkább előre tolódott, mert a kórházak igyekeztek minél előbb kiválasztani a legjobb jelölteket. Végül a diákok jó része már 2 évvel a végzés előtt elkötelezte magát egy gyakornoki pozícióra. Ez nagy bizonytalanságot jelentett mindkét oldal részére, és jelentős keresési költségeket rótt a felekre.

Az anomáliák megoldására az amerikai orvosok érdekképviselete (AAMC: Association of American Medical Colleges) azt javasolta, hogy csak az utolsó évben lévő hallgatók kaphassanak igazolást az érdemjegyeikről az egyetemektől. A későbbiekben még szigorúbban szabták meg azt az időszakot, amelyben állást kereshetnek a diákok. Újabb gondok jelentkeztek. A diákok sok esetben a végsőkig kivártak egy ajánlat elfogadásával, mert nem tudták,

[27] A leírás Roth [49] cikkéből származik, de megtalálható későbbi munkáiban, így a Sotomayorral közösen írt [59] könyvben is.

hogy esetleg jön-e egy kedvezőbb később, ezért a rezidens helyek egyre nagyobb nyomást gyakoroltak a diákokra, hogy mielőbb döntést hozzanak. A diákok bosszankodtak, ha elfogadtak egy ajánlatot és később mégis egy jobb helyre hívták őket, és a kórházak is elégedetlenek voltak, ha az utolsó pillanatban egy jelöltjük visszalépett, és a további jelöltek már elkötelezték magukat egy – talán számukra is kedvezőtlenebb – másik állásba. 1949-ben már olyannyira lecsökkentették az álláskeresésre fordítható időt, hogy az év egy bizonyos napján (november 15) elküldött ajánlatokra aznap éjfélig kellett választ adniuk a diákoknak. De a telefonhívások révén megmaradt a nyomásgyakorlás lehetősége és semmivel sem csökkent az elégedetlenség.

Az 1950/51-es tanévben a piac szereplői egyetértettek abban, hogy a rosszulműködést valahogyan orvosolni kell, és ezt csak központi irányítással lehet elérni. Megalkottak egy eljárást, amelyben a diákok és a befogadó kórházak között az információcsere, interjúztatás a megszokott módon történhetett, ezután viszont mind a diákok, mind a kórházak sorbarendezték a lehetséges pozíciókat illetve jelentkezőket, és elküldték a listákat a központba. Ott egy egyszerű procedúrával kihozták, hogy kit melyik helyre vesznek fel. Az első évben még csak próbaképpen bonyolították le az eljárást, és a résztvevők minden kötelezettség nélkül tudták meg, hogy hová kerültek volna az algoritmus által. Az eredményt általános elégedettség követte, és ennek alapján eldöntötték, hogy a következő évben már élesben használják a rendszert.

A diákok képviselői azonban egy kisebb ellentmondást fedeztek fel a nyilvánossá tett eljárásban.[28] Ezt kijavították és egy módosított eljárásban egyeztek meg. Lényegében ugyanazt az algoritmust vezették be, amelynek az elméletét később – tőlük teljesen függetlenül – Gale és Shapley [27] dolgozta ki.[29]A részvétel nem volt kötelező, de a diákok 95%-a jelentkezett rá, és így

[28]Az eredeti algoritmus több lépcsőből állt, a kórházak csoportokra osztották a jelentkezőket, mindegyikben pontosan annyi jelentkező volt, amennyi a szabad helyek száma (pontosan az első csoportot venné fel a kórház, ha nekik is a kórház szerepelne az első helyen). Az algoritmus az első lépcsőben az 1:1 párok közül véglegesített minél többet, vagyis azon párokat, ahol a jelentkező benne volt a kórház első csoportjában, és a jelentkező is az első helyre tette a kórházat. Ezután jöttek az 1:2 párok (ahol a jelentkező még mindig első helyre tette a kórházat, és a jelentkező a kórház 2. csoportjába került), majd a 2:1, 2:2, 1:3, stb. párok. Instabilitás akkor léphetett volna fel, ha mondjuk egy jelentkező az első két lépcsőben nem kap párt, majd a 2:1 körben a részéről 2. helyen rangsorolt kórház visszautasítja őt, mert az 1:2 lépcsőben már betöltötte a helyeit, pedig a kórháznál ő az 1. csoportban volt.

[29]Fontos megjegyezni, hogy az ajánlattétel szimulálása a diákok részéről történik, tehát az eredmény a jelentkezők számára optimális. Az amerikai rendszer (lásd [89]) mintájára létrehozott japán kórházi rezidens párosító-program [87] ehhez teljesen ha-

párosították ki őket a gyakornoki helyekre.

A program sikeressége töretlen volt, és egészen napjainkig használatban van, a mai elnevezése: National Resident Matching Program (NRMP). Egyedül a 1970 körül volt tapasztalható némi visszaesés a részvételi arányban (85%-ra csökkent). Ezt azzal magyarázták, hogy egyre több házaspár keresett együtt állást, és a ő közös preferenciájukra a program nem volt tekintettel.

Mitől lesz sikeres egy párosító-program?

A hatvanas évek végén az amerikai példán fellelkesedve Nagy-Britanniában az orvosképzési bizottság (Royal Commission on Medical Education) egy riportot készített, melynek nyomán több régióban is bevezettek különböző párosító-programokat. Néhány közülük ma is működik, némelyik viszont azóta megszűnt. Ez kitűnő lehetőséget adott annak vizsgálatára, hogy vajon mitől lesz működőképes egy ilyen rendszer. Ezt az összehasonlítást Roth [53] munkájában el is végezte.

Az amerikai kórházi gyakornokok elhelyezése mellett, még egy amerikai algoritmust (ezt a lánykollégiumok feltöltésére használták, lásd Roth [46]), és a fent említett nyolc különböző régióban működő párosító-programot elemezte részletesen. Mindegyik algoritmusról, a leírása alapján, el tudta dönteni, hogy stabil megoldást produkál-e, a tízből négy bizonyult ilyennek. Legfontosabb megállapítása az volt, hogy a stabil eredményt szolgáltató algoritmus közül mind a négy használatban maradt, a hat instabil megoldásra vezetőből pedig csak kettő nem szűnt meg. Ez a kettő viszont a két legkisebb régióban volt alkalmazva, és az instabilitás létrejötte sem volt nagy valószínűségű bennük. A megszűnt programok viszonylag gyorsan elbuktak. Ennek oka, hogy a blokkoló párok hamar egymásra találtak, és ahogy a rosszulműködés híre terjedt, úgy bonyolították le egyre többen a szerződéskötést inkább a rendszeren kívül.

Napjainkban működő párosító-szolgáltatók

A piacok száma, ahol párosító-rendszereket használnak egyre növekszik. Mára már az is nyilvánvalóvá vált, hogy maga a mechanizmus teljesen függetleníthető a piac szereplőitől, vagy az őket koordináló érdekszövetségektől. Ezért a párosítások lebonyolítására külön vállalatok jöttek létre, ezek biztosítják a lebonyolítás technikai részét. Megbízói körük gyorsan gyarapszik. A piac szereplőinek ugyanis – egyénenként viszonylag minimális díjazás fejében, amit vagy mindenki külön vagy az érdekképviseletük által fizet ki – nem kell

sonlóan működik.

más tenniük, mint a szokásos módon felvenni a kapcsolatot egymással, majd az információk beszerzése után az interneten rangsorolni a lehetséges partnereket. A nyilvános fórum ráadásul az átláthatóságot, és a szereplők közti kapcsolatfelvételt is megkönnyíti.

Az eljárás kidolgozásának és működtetésének jelentős költsége így nem a piac szereplőit terheli, a szoftvert – amely magát a párosító-programot és az adatbázis-kezelő adminisztrációs rendszert tartalmazza – kell csak megfizetni, és a piac egyensúlya az automatizmus révén létrejön. A legtöbb piac esetében ugyanazt az általános eljárást használhatja a program. Speciális igények esetén (például, hogy házaspárok jelentkezhessenek együtt is) a szoftvert testreszabhatják.

Egy ilyen szervezet a Kanadában bejegyzett National Matching Services Inc.[30] Jelenleg hat nagyszabású párosító-program adminisztrációját végzi. Mindegyikről pontos leírást tesz közzé, majd az eredményeket a program lebonyolítása után statisztikákban is összegzi.

A hat éppen befejeződött program egyike az Egyesült Államok-beli gyógyszerész gyakornokok párosítása. Itt a megbízó az American Society of Health-System Pharmacists (ASHP) volt.[31] Ebben az évben 1222 pozíciót hirdettek meg, amelyre összesen 1356 diák jelentkezett. A lehetséges kapcsolatok száma (vagyis az egymást kölcsönösen elfogadó állás-jelentkező párok száma) 2903 volt. Végül 1024 állás került betöltésre a program keretében.

A részmunkaidős foglalkoztatás kérdése

Ahogyan ezt a 3.2 alfejezetben ismertettem, az allokációs probléma kétoldali párosító-piacok esetén jól kezelhető, hiszen stabil megoldás mindig létezik, és gyorsan ki is számítható. Utaltam rá, és példaként az iskolai tanítók piacán szemléltettem, hogy miként működhetne egy párosító-program a részmunkaidős foglalkoztatásban. Megjegyeztem, és most is fontosnak tartom kihangsúlyozni, hogy ez a modell akkor lehet releváns, ha egyrészt az állások rugalmasan bonthatók részállásokra, másrészt mind a munkaadó, mind a munkavállaló preferenciájában két azonos összidejű részállás betöltése előnyösebb, mint a kedvezőtlenebb munkakapcsolat teljes időben történő megkötése. A lényegi feltétel tehát, hogy egy dolgozó mindig kedvezőbben

[30] Az érdeklődő Olvasónak mindenképpen ajánlom, hogy az interneten keresse fel a vállalat honlapját [88], ahol minden részletes információ megtalálható az elvégzett és folyamatban lévő párosító-programokról.

[31] Ahogy a honlapjukról kiderül, a programot ők szponzorálták, ellentétben például az ortopéd orvosok gyakornoki programjával, ahol a résztvevő diákok voltak kénytelenek befizetni egyenként 65 dollárt a jelentkezéskor.

ítéljen meg két félállást, mint a rosszabbik helyen egy teljes állást, hasonlóképpen a munkaadónak inkább érdekében álljon két félállás betöltése, mint a rosszabbik jelentkező foglalkoztatása teljes munkaidőben.

Ez a rugalmassági feltétel egyrészről adódhat a munka jellegéből. A technikai fejlődés révén előretörő távmunka[32] például jellemzően könnyen felosztható, és a fizikai korlátok – például munkahelyek közti távolság – nem okozhatják a preferenciák nem kívánt módosulását a teljes állások irányában. Hasonlóképpen előnyös lehet a részmunkaidős modell például nagyobb vállalatoknál a munkák belső allokálására. A projekt alapú munkaszervezéseben a dolgozók beosztásánál természetesen hasznos lehet figyelembe venni mind a dolgozók, mind a projekt-vezetők preferenciáit a munkaórák elosztásakor, emellett igen sok esetben teljesülhetnek a fent leírt rugalmassági feltételek is.

Továbbá, nagyon fontos az aktuális törvényi szabályozás. Ugyanis az adminisztratív, és egyéb terhek előnytelenné tehetik a részmunkaidős foglalkoztatást. Másik oldalon viszont, az egyszerűsített adminisztráció és az esetleges kedvezmények nagy mértékben növelhetik mindkét fél hajlandóságát. [33] Érdemes lenne összehasonlítani az egyes országokban alkalmazott törvényi kereteket, melyek hatására például a skandináv országokban (amelyekben egyes statisztikák szerint legnagyobb a jólét) sokkal jelentősebb a részmunkaidőben foglalkoztatottak száma, mint hazánkban.

Megjegyzem, hogy a rugalmas foglalkoztatás – törvényi szabályozással történő – elősegítése a piaci szereplők szabad választását szolgálja, tágítja a lehetséges együttműködések terét.

6.2. Egyetemi felvételi probléma

Az első munkakereséshez nagyon hasonló jellegű problémával találkozunk az egyetemi felvételi esetén, hiszen egyszerre nagy számban történik a jelentkezés. A diákok és az egyetemek közötti kapcsolat szintén a szabad választáson alapul, de akármilyen formában történjen is a kifizetés a szereplők között – közvetlenül, a képzési díj kifizetésével vagy közvetetten,

[32] A napokban kaptam egy levelet, amely szerint ez év szeptemberétől mintegy 200 matematikus oktatót keresnek, akik tisztes fizetésért tarthatnak kislétszámú továbbképzést videokonferencia útján amerikai matematikatanároknak.

[33] A kérdés fontosságát mutathatja, hogy – az éppen jelen pillanatban zajló – 2006-os magyarországi választások mindkét miniszterelnök-jelölti vitában az egyik fél külön kihangsúlyozta, hogy győzelmük esetén a részmunkaidős munkavállalás adminisztratív terheit jelentősen csökkenteni kívánják. Elősegítve ezzel többek közt a gyermeknevelés miatt leterhelt szülők rugalmas foglalkoztatását.

állami finanszírozásban – azt mindenesetre feltehetjük, hogy a kifizetés mértéke nem alku tárgya, a képzési díj egy előre meghatározott fix összeg. Ahogy azt a fejezet bevezetőjében már hangsúlyoztam, ha van is tandíj, akkor annak mértéke beépül a jelentkezők preferenciájába és minden esetben a stabil kiosztás probléma kifizetés nélküli változata alkalmazható leíró modellként.

A szereplők közötti szabályozatlan kapcsolatfelvétel hasonló anomáliákat szül, mint az imént tárgyalt munka-piac esetében. Előfordulhat, hogy egy amerikai diáknak három vastag borítékja is érkezik (ennyi helyre vették fel), másnak pedig csak egy várólistás hely. Könnyen meggondolható, hogy rengeteg eset vezethet egy diák-egyetem pár kölcsönös elégedetlenségéhez, sőt a legrosszabb esetben a diákot sehová sem veszik fel, és az egyetemek is károsulhatnak abból, ha rosszul határozzák meg az elfogadott jelentkezések számát, és végül túl sok vagy túl kevés diák kéri ténylegesen a felvételét. A központi párosító-programok bevezetése gyakorlatilag minden esetben indokolt.

Az országok nagy része – így a legnívósabb oktatással rendelkező Egyesült Államok és Nagy-Britannia – mégsem rendelkezik ilyen központi rendszerrel. Az ok véleményem szerint a tradíció. Egy évszázada még talán joggal tartottak ezekben a liberális szemléletű országokban a szereplők attól, hogy egy felsőbb intézményrendszer adminisztrációja szabályozza a felvételt. Mára azonban világossá vált, hogy a mechanizmus működtetése nem igényli egy hatalmi jogkörrel bíró központi szervezet létrehozását. A modern technikák azt is lehetővé teszik, hogy az automatizmus működtetését egy független szerv vagy akár egy vállalat végezze el. Ennek felismerése és elfogadása a piac szereplőinek részéről úgy gondolom, hogy csak idő kérdése.

Azon országokban viszont, ahol amúgy is központilag irányították a felsőoktatást, – és jellemzően annak finanszírozása is közvetetten, az állam részéről történt – sok esetben vezettek be központi felvételi eljárást. A történelem első példája nagy valószínűséggel Franciaországban keresendő, [34] de a második világháború után a szovjet befolyási övezetben, így hazánkban

[34]Ennek kiderítésére kutatásba kezdtem, amelynek azonban még nem értem a végére. Először Bihari Pétert – középiskolai történelem-tanáromat – kerestem fel kérdésemmel. Ő úgy gondolta, hogy a francia oktatásban érdemes először körülnézni, mert ott főként Napóleon uralkodását követően igen centralizált rendszer alakult ki. Javasolta, hogy keressem fel Karády Viktor professzort, aki nemrégiben írt könyvet a francia oktatás történetéről [37]. A professzor úr véleménye szerint először valószínűleg az elitképző szakiskolákban létezhetett ilyen felvételi rendszer, amelyben a jelöltek osztályozása – szigorú, átlátható, részrehajlástól mentes – versenyvizsgák alapján történt, és történik ma is. Ennek alapján írtam levelet Julia Dominique-nak, aki a versenyvizsgák történetét is kutatja, ő azt tanácsolta, hogy kérdésemmel forduljak Bruno Belhoste professzorhoz, aki a műszaki

is központi rendszereket vezettek be.

A hazai rendszer

A hazai felvételi rendszert nyilvános részét talán nem kell részletesen bemutatnom. Az Olvasó valószínűleg tudja, hogy a diákok a jelentkezési lapokon tüntetik fel a preferenciájukat, majd a felvételi vizsgák nyomán a jelentkezők pontozása megtörténik, végül az Országos Felsőoktatási Felvételi Iroda (OFI) meghatározza minden szak esetén a felvételi pontszámokat. Mindegyik jelentkezőt a listáján szereplő első olyan szakra veszik fel, ahol a megszerzett pontszáma eléri a kitűzött ponthatárt.

A ponthatárok meghatározásának módja már talán kevésbé közismert. A futtatott algoritmus lényegében szintén a Gale és Shapley által elemzett „leánykérő algoritmus" szerint működik, mégpedig az egyetemek részéről szimulált ajánlattételekkel (vagyis a végeredmény egyetem-optimális). Van azonban néhány speciális eleme. Az első, hogy a pontszámok egyezése (preferencia-egyezések) miatt a pontkorlátot minden lépésben úgy határozzák meg, hogy a felvettek száma ne haladja meg a szakra előírt kvótát. (Emiatt megeshet, hogy a felvett létszám nagy mértékben elmarad a limittől.) További megszorító tényezők lehetnek a pontszámokra előírt jogszabályi korlátok. A ponthatár egyik szak esetében se lehet kevesebb, mint a maximális elérhető pontszám 60%-a, illetve az önköltséges képzés ponthatára legfeljebb 10%-kal térhet el az államilag finanszírozott képzés ponthatárától. Végül külön problémát jelentenek azok a szakok, amelyek közül egyszerre kettőre is felvételt nyerhet a jelentkező (párosítható szakpár), illetve azok szakok, amelyek közül kötelező kettőt felvennie minden jelentkezőnek (párosítandó szakpár). Ez utóbbi problémát nem is tudják közvetlenül kezelni az algoritmusban, de hatásuk az egész rendszerre nézve nem számottevő.

Megjegyzem, hogy hazánkban a középfokú intézményekben is hasonló felvételi rendszer működik az Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont (OKÉV) szervezésében. Számos nemzetközi példa mutatja, hogy egyre elterjedtebb a központi párosító-programok használata az oktatás alsóbb szintjein is. Érdekes esettanulmányok készültek nemrég a New York-i középiskolák [1] és a bostoni általános iskolák [2] felvételi rendszerének megreformálásáról.

szakfőiskolák (École polytechnique) kiváló szakértője. Megkeresésemre az elmúlt napokban kaptam választ, részletes leírásokat, tanulmányrészleteket Belhoste professzor úrtól. Ezek feldolgozására, és a történelmi példák pontos elemzésére szeretnék a közeljövőben sort keríteni. A múlt ismerete ugyanis nagyon fontos lehet, többek közt az egységes európai felvételi rendszer kialakítása melletti érvelésben is. Ezúton is szeretném megköszönni elsősorban Bihari Péter és az imént felsorolt professzor urak nagylelkű segítségét.

Az Európai Unió közös felvételi rendszere[35]

Az Európai Unió egyik legnagyobb szabású folyamatban lévő reformja a felsőoktatás egységesítésére irányul, célja a közös Európai Felsőoktatási Térség kialakítása. Az összefoglalóan Bolognai-folyamatként aposztrofált intézkedéssorozat legfontosabb elemei – az egyetemi képzés két lépcsőre (BSc és MSc) bontása, illetve a kreditrendszer egységesítése – elsősorban a képzések közötti átjárhatóságot hivatottak elősegíteni.

Amennyiben 2010-re valóban megvalósulnak a kitűzött célok (erre reális esély mutatkozik), akkor a diákok mobilitása várhatóan nagy mértékben megnő. Egyre többen fogják – főként a MSc képzést – hazájukon kívüli egyetemen elvégezni. Ez jelentős zavarokat idézhet elő az egyes nemzeti felvételi rendszerekben. Ha a diákoknak akár csak a 10-20%-a jelentkezik hazai és külföldi helyekre is, akkor már kiszámíthatatlanná válik, hogy hány üres hely keletkezik az egyes szakokon a visszamondások révén.

Úgy gondolom, hogy hosszútávon elkerülhetetlen a felvételi rendszer egységesítése. Ennek elfogadtatása vélhetően nem lesz egyszerű – hiszen sért bizonyos lokális érdekeket, a felvételt szervező adminisztrációkra például nem lenne már szükség – de amennyiben minden szereplő számára világossá válik, hogy a párosító-rendszer nem csökkenti senkinek a szabad választását, és bevezetése mindenkinek a hasznára válhat, akkor realizálódhat az új rendszer. Ismételten szeretném kihangsúlyozni, hogy a felvételizők rangsorolásának módja vagy a tandíj mértékének meghatározása teljesen függetlenül, szabadon választható akár minden egyes szak részéről.

De nem csak a piaci anomáliák (elégedetlen párok és rosszul tervezhető létszámok) szűnnének meg, mindkét oldal szereplői jelentősen profitálhatnának belőle. Ha egy diák például a magyar egyetem egy szakja után a következő X-et egy angol, vagy osztrák szakra tehetné, majd megint egy magyar szakra, akkor ezzel a választással sokkal nagyobb valószínűséggel tényleg élne is. Az egyetemek pedig, ahová egyre nagyobb arányban jelentkeznének külföldi diákok, valódi versenyre kényszerülnének, amely a piaci mechanizmusok alapelve szerint javítaná a képzések színvonalát, és ezzel együtt az oktatók megbecsülését, díjazásának emelkedését. A diákok és oktatók mobilitásának növekedése pedig jelentős további hasznokat eredményezhet. Nem utolsósorban az európai identitás mélyítésében is fontos szerepet játszhat.

[35] Az 1999-es bolognai deklaráció, és az európai országok oktatási minisztereinek prágai (2001), berlini (2003) és bergeni (2005) kommünikéje letölthető például az European Association of Institutions in Higher Education (EURASHE) [83] honlapjáról.

6.3. Házasítás

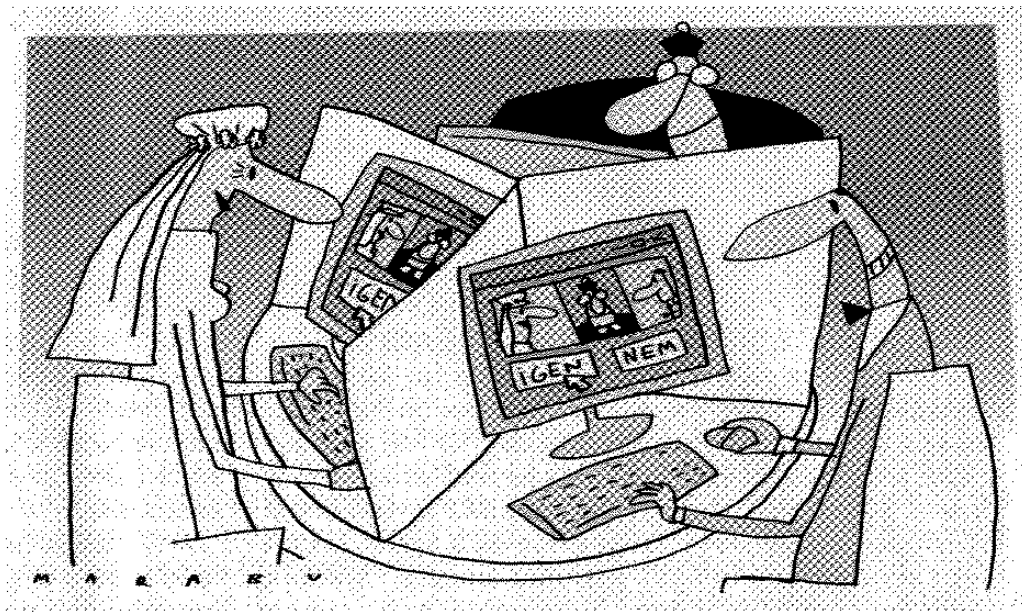
Ha a barátaim, ismerőseim megkérdezik, hogy mivel foglalkozom, és tényleg érdekli őket, akkor néha elmondom példáként a stabil házassági modellt. Nem egyszer kaptam meg utána azt a kérdést, hogy „Ezek szerint a te munkád amolyan házasságközvetítés?” Hát talán ennél azért komolyabb alkalmazásai is vannak. De mégis, lehet hogy érdemes néhány szót szólnunk a párválasztás menetének esetleges befolyásolásáról.

A házasságközvetítés elismert foglalkozásnak számított a múltban, és sok országban ma is az. A nyugati kultúrkörökben a szabadság, a női egyenjogúság, és az individualizmus előretörésével az egyének egyre inkább befolyásoktól mentesen hozzák meg életük talán legfontosabb döntését, hogy kivel kössenek házasságot. A gond csak ott van, hogy az elvárások – melyeket filmek, reklámok és önmegvalósító filozófiák gerjesztenek a fogyasztói kultúra részeként – egyre magasabbak az ideális partnerrel szemben, messze elszakadva a realitásoktól. Miközben a párválasztás időszakában az emberek nagy része, épp a karrierépítési szakaszban, gyakorlatilag csak a munkatársaival érintkezik, egyáltalán nincs lehetősége az ismerkedésre. Egy németországi felmérésen arra a kérdésre, hogy miért nem alapított családot, a válaszadók legnagyobb része (44%) azt válaszolta, hogy nem találta meg a megfelelő partnert.

A kérdés társadalmilag már nem is olyan jelentéktelen, ha hozzátesszük, hogy emiatt pont ezekben az országokban – így hazánkban is – a népesség egyre fogy, legfeljebb csak az új bevándorlók, vagy a régebbiek magasabb születési aránya tompítja ezt a folyamatot. Ennek negatív hatása gazdaságilag leginkább a társadalombiztosítási kassza hiányában mutatkozik meg, de számos társadalmi problémát szül a beilleszkedni nem tudó bevándorlók egyre nagyobb aránya is.

Miként lehet ösztönözni a családalapítást, vagy legalább elősegíteni a sikeres párválasztást? A politikának számos válasza lehet, amellyel gyerekvállalásra buzdíthatja a párokat, a családi adókedvezménytől, a lakáshitel támogatásán át, a gyereknevelési segélyekig. De hogyan találjuk meg a megfelelő párt? A szabad választásban és a sors kezében való hit miatt a legtöbben ódzkodnak attól, hogy bármilyen erőfeszítést is tegyenek az ismerkedésre, és méginkább a csalódás elkerülése végett az ajánlattételre. Pedig az internet ez esetben is jelentősen megkönnyítheti a kapcsolatfelvételt. Randevúra hívni valakit, azért még így is feltételez némi bátorságot. Majd sikertelenség esetén megkérdezni a következő jelöltet? Kicsit kellemetlenül hangzik.

Ebben segíthet az algoritmus, ahol mindenki a szabad választása szerint jelöli be a lehetséges partnereit az előzetes ismerkedés alapján. Nincs szükség tényleges ajánlattételre, fájó visszautasításokra, és végeredményként



11. Ábra. Egy karikatúra a [82] publicisztikában.

egy csalódott pároktól mentes párosítást kapunk, amit jó eséllyel minden résztvevő elfogad (akár, mint a sors döntését). Ez persze korántsem házasítást jelent, legfeljebb egy lehetőséget a további ismerkedésre az első randevún.

7. Egyoldali párosítás-piac

A fejezet során olyan párosítás-piacokat, játékokat vizsgálok, ahol tetszőleges két szereplő között létrejöhet párkapcsolat, és nincs kifizetés a játékosok között.

Először két hétköznapi alkalmazást mutatok be: a híres svájci-rendszerű, sakkversenyeken használt párosító-programot, majd egy egészen új társadalmi kezdeményezést, amely keretében egy időre lakást cserélnek egymással a vállalkozó kedvű utazók.

A fejezetet végén a párosító-rendszerek egy egészen komoly alkalmazási lehetőségét ismertetem, a páronkénti vesecserét. Az élődonoros transzplantáció korunk egyik igen fontos gyógyítási technikája és egyben társadalmi kérdése, amely etikailag és törvényileg sem tisztázott még világosan. A megfelelő donor megtalálásának egyik új módja lehet az elemzésre kerülő párosító program.

7.1. Párosító-program sakkversenyre

A svájci-rendszerű sakkverseny lebonyolítási módszere híres és méltán elismert. Lényege, hogy a sakkverseny minden körében azokat a versenyzőket igyekeznek összepárosítani, akiknek közel azonos pontszámuk van. Így végeredményben a verseny végén legtöbb pontot összegyűjtő játékos jogosan mondhatja magát a legjobbnak. A másik két alapvető versenytípussal, a kieséses, illetve körmérkőzéses lebonyolításokkal ellentétben, itt a párosítási szisztéma igen bonyolult, de cserébe változatos ellenfelekkel kerülhet össze minden versenyző az aktuális körig nyújtott teljesítménye alapján.

A modell szerint minden egyes körben egy teljes párosítást kell találnia a játékvezetőnek, vagyis mindenkinek kell partnert kapnia (kivéve persze egy embert, ha páratlan számú játékos van, ő előnyerőként egy pontot szerez). A párosítás legfontosabb kritériuma, hogy semelyik két játékos nem játszhat kétszer egymás ellen ugyanazon a versenyen. Egy adott körben tehát azok a játékosok alkothatnak egymással párt, akik még nem játszottak egymással az azt megelőző körökben. Az ilyen párok között kétféle kapcsolat jöhet létre aszerint, hogy ki legyen világos és ki sötét a mérkőzésen. Senki sem lehet egymás után háromszor ugyanazzal a színnel, és összességében sem játszhat valaki kettőnél többet az egyik színnel, mint a másikkal.

A tiltó feltételeken kívül preferenciák is adva vannak, melyek közül a legfontosabb, hogy lehetőleg a közel azonos pontszámmal rendelkezőket sorsoljuk össze. Az algoritmus menete pontosan meghatározott[36], napjainkban

[36]Megtalálható a Nemzetközi Sakkszövetség (FIDE) [85] honlapján.

már szinte mindenütt párosító-szoftver segítségével sorsolnak. Az algoritmus lényege, hogy mindig a legnagyobb pontszámú játékosnak keresnek ellenfelet. Az azonos pontszámúak között igyekeznek úgy sorsolni, hogy hasonló Élő-pontszámú játékosok ne kerüljenek össze. Ha például négy játékos, A, B, C és D van ugyanakkora pontszámmal, és négyük Élő-pontszám szerinti erősorrendje mondjuk megegyezik az iménti felsorolással, akkor a program A-t C-vel, B-t pedig D-vel fogja összetenni.

Kérdés, hogy miért pont ezt az algoritmus használjuk? Az utóbb említett automatizmus következménye például, hogy egy tipikus kilencfordulós versenyen, ahol nagy a résztvevők száma, egy versenyző legfeljebb csak az utolsó fordulókban találkozik össze vele hasonló Élő-pontszámú, vagyis elvileg hasonló játékerősségű ellenféllel. Ez például engem, mint hobbisakkozót kifejezetten bosszant, mert nem szeretek se sokkal erősebbel, se pedig sokkal gyengébb ellenféllel játszani. Nem lehetne minden körben olyan párokat alkotni, amely a játékosok egyéni preferenciájának legjobban megfelel? De lehetne, pontosan ezt adja a megfelelő stabil párosítási feladat megoldása[37]. Nagy hátránya viszont az lenne, hogy ekkor a legtöbb pontot gyűjtő játékos már nem biztos, hogy a verseny legerősebb résztvevője lenne. Sok versenyző célja viszont nem a verseny megnyerése, hanem az ellenfelekkel szemben mutatott jó teljesítmény vagy pusztán csak a játék élvezete. Igen gyakoriak az olyan körversenyek, ahol közel azonos Élő-pontszámú játékosok mérkőznek meg egymással, és céljuk nem elsősorban az elsőség, hanem a jó teljesítmény (magasabb szinten ez norma teljesítését jelenti).

Alternatív eljárásként összességében nem tartom elvetélt ötletnek egy egyéni preferenciák szerint stabil párosításokon alapuló versenyszabályt. Ez a körmérkőzések előnyeit kombinálná egy nagylétszámú verseny adottságaival (körmérkőzést megszervezni elég nehéz, és a nagylétszámú versenyen az ellenfelek változatosabbak). Csupán olyan játékosok részvételére van hozzá szükség, akiknek nem a verseny megnyerése az első számú cél.

[37]Szintén a stabil párosítás módszerét próbálták meg alkalmazni hivatalosan szabályzat szerinti preferenciákra a [43] tanulmányban. Az ötfordulós versenyekre végzett tesztekre nem is mutatott sokkal rosszabb statisztikákat, mint az eredeti program. Azonban, véleményem szerint nagyobb ponteltérések esetén, mondjuk az utolsó 9. fordulóban már elég rossz eredményeket szülne a stabil megoldás (ahol egy párosítás gyengeségének legfontosabb mérőszáma az összehozott párok pontjainak eltérésnégyzete). Például, ha A 5-pontos, B 3, C 2 és és D 0-pontos, akkor a stabil megoldás B-t C-vel hozná össze, majd A-t D-vel. Itt az eltérések négyzetösszege nagyon nagy, és a verseny elveinek sem felel meg a párosítás.

7.2. Lakáscsere nyaralásra

Nagyszerű ötletnek tartom a következőkben ismertetett világszerte hódító, új kezdeményezést. Lényege, hogy az utazni vágyó családok kapcsolatba lépnek más utazni vágyó családokkal és egyszerűen kicserélik lakásukat arra az adott időszakra. Rengeteg pénzt megspórolnak a szállásköltséggel, mellesleg vigyáznak egymás lakására, (öntözik a virágokat és etetik a háziállatot), és ami még talán ennél is fontosabb: otthon érezhetik magukat, belsőséges információkhoz jutnak az új kultúráról.

A cserék korrekt kivitelezésére azért nem árt, ha védett és nem minden biztosíték nélküli, teljesen önszerveződő közösségben keresünk partnert. Ennek céljából alakult több, a cseréket koordináló szervezet, vállalat. Az egyik ilyen az 1992-ben alapított HomeExchange.com [86], melynek közel 9000 tagja van. A minimális tagdíjért cserébe a résztvevők pontos információkhoz és biztosítékhoz jutnak a csere kimenetelének sikerességéhez.

A kapcsolatteremtés a szereplők feladata. Mindenki pontos leírást ad a lakásáról, és azt is ismerteti, hogy mely helyekre és mikor utazna szívesen. Ha kölcsönös az érdeklődés, akkor jöhet a kapcsolatfelvétel, majd az utazás. A sikeres utazást követően a résztvevők pontozzák egymást, mennyire voltak elégedettek a hellyel. Ez megjelenik az adott személyek lapján, és biztonságos támpontot, referenciát adhat a következő utazóknak.

A stabil párosítási algoritmus bevezetése viszont itt is megfontolandó lehet. Bosszankodásra adhat ugyanis okot az, ha elfogadunk egy ajánlatot majd röviddel azután kapunk egy ennél jobb másikat. Az ismerkedés nem egyszerű, és az esetleges lemondás kellemetlen helyzete is elkerülhető lenne egy egyszerű párosító-program használatával. Az utazások nagy többsége tipikusan egy intervallumban, a nyári szünetben bonyolódik le. A szereplőknek tehát egy adott időpontig kellene rangsorolniuk az elfogadhatónak gondolt jelöltjeiket figyelembe véve az utazás lehetséges időpontját. (A modellben tehát a szereplők között több lehetséges kapcsolat van az utazás időpontjától függően.) Ezután az algoritmus szolgáltatna egy jó eséllyel stabil megoldást megkímélve a szereplőket a kapcsolatfelvétel nehézségeitől és az esetleges kellemetlenségektől.

7.3. Szervtranszplantáció Európában

Világszerte százezreknek jelenti a gyógyulás esetlen esélyét a szervtranszplantáció. Legnagyobb számban vese, de egyre növekvő arányban máj, tüdő, szív, hasnyálmirigy és vastagbél kerülhet átültetésre. Kezdetekben kizárólag halottak szerveit használták, – ezt orvosi szakszóval *cadaver donációnak* nevezzük – napjainkban azonban mindinkább elterjedőben van az élődonoros transzplantáció, amely során az egészséges emberben lévő két szerv közül az egyiket (vagy a szervnek egy részét) ültetik át a beteg emberbe.

A nagyságrendek érzékeltetése végett: az Egyesült Államokban 2003-ban közel 60000-en vártak beültethető vesére, közülük 8665 kapott abban az évben szervet halott donortól és 6464 pedig élő donortól. A várólistán szereplő emberek közül 3436 hunyt el.[38]

A közelmúltban hazánkban is társadalmi vita tárgyává vált a szervátültetés ügye. Kiindítója egy szerencsétlen kimenetelű élődonoros transzplantáció volt. A kislány, akibe édesapja májlebenyét ültették be, majd ennek sikertelensége után egy – nemzetközi segítséggel, sürgősséggel kapott – elhunyttól származó szervet, sajnos nem élte túl a megpróbáltatásokat. Nem sokkal később viszont ugyanott sikeresen hajtottak végre egy hasonló élődonoros átültetést. A vita ráirányította a figyelmet a szervtranszplantáció aktuális kérdéseire. Talán ennek is köszönhető, hogy Magyarország napjainkban jelezte felvételi szándékát – a több európai országot tömörítő, transzplantációkat koordináló szervezetbe, – az Eurotransplantba.

Eurotransplant[39]

Az Eurotransplantot 1967-ben alapították meg, a 2005 augusztusában megújított alapszerződés szerint jelenleg hat ország (Ausztria, Belgium, Hollandia, Luxemburg, Németország és Szlovénia) tagja a szervezetnek. Legfontosabb deklarált célja, hogy a beültethető szervek elosztását hatékonyan és igazságosan koordinálják.

A részletesen ismertetett szabályozás szerint egy párosító-programot konstruáltak, amely a betáplált preferenciák szerint keresi ki az adatbázisból a beérkezett szervhez a legmegfelelőbb beteget. Elsődleges annak eldöntése, hogy a szerv beültetése megvalósítható-e. Ebben az orvosi paraméterek (vércsoport, szövettan, a szerv mérete, állapota) mellett a földrajzi távolság számít leginkább. Másodsorban a lehetséges recipiens közötti választásnál a beteg állapotából adódó sürgősség számít, végül pedig az, hogy az illető mióta vár az új szervre. A betegnek és a beültetést végző kórháznak mindössze egy órája van, hogy eldöntse, vállalják-e a műtétet. Ha nem, akkor a program kikeresi a következő jelöltet.

A közzétett statisztikák szerint 2005-ben összesen 11515-en szerepeltek a vesére váró betegek listáján. 3387 beteg kapott új szervet halott donortól és 854 beteg élő donortól az Eurotransplant tevékenysége nyomán. Az élő

[38] Az adatok a [65] cikkből származnak.

[39] A felhasznált adatokat a szervezet honlapjáról [84] töltöttem le.

donorok között egyre növekvő számban (2005-ben 365 beteg esetében) voltak olyanok akik nem álltak rokoni kapcsolatban a beteggel.

Egy statisztika szerint (lásd [65]) a jelentkező élő donorok mintegy fele a beteg házastársa. Ez talán érthető, mivel a legközelebbi kapcsolatban a közép- és időskorú betegekkel a házastársuk áll. Ő az, aki hajlandó lemondani a tökéletes egészségről, elviselni a fájdalmat és a rövid távú kellemetlenségeket, és elfogadni a hosszútávon – bár minimálisan, de mégiscsak – csökkenő életkilátásokat, cserébe élete párjának egészségéért és jelentősen javuló életkilátásáért. Problémát jelent viszont, hogy a házastársak közül sok párnak nem megfelelők az orvosi paraméterei a donációhoz, sőt egy bizonyos antitest a gyerekszülést követően kialakulhat az anyában és ez még gyakrabban teszi lehetetlenné, hogy a férj donorrá válhasson. Felmerül azonban a kérdés, hogy ha egy ilyen házaspár találkozik egy hasonló problémával küzdő másik párral, és keresztben stimmelnek a megfelelő paraméterek, akkor lehetséges-e egy kölcsönösen hasznos megegyezés a párok között a vesék cseréjéről?

Páronkénti vesecsere

A következő történet egy napilap [80] színes hírei között volt olvasható nemrégiben.

„Tizennégy sikeres veseátültetést tudhat maga mögött egy különleges chicagói donor-program. Nyolcvan olyan pár lépett szövetségre, amelyek egyik tagja vesére szorul, és bár a másik szívesen adná oda saját szervét, nem egyeznek a vércsoportjaik, vagy más eltérések zárják ki a műtétet. A programban részt vevők egymást között cserélnek párt és vesét. A Páros Donáció Konzorciumot egy Carl Chandler nevű pap szervezte (...) Chicagó körzetében a vesebetegek átlagosan öt évet várnak a szervátültetésre, a fekete és a latin páciensek ennél is többet. A várólistán lévők közül sokan meghalnak, mielőtt rájuk kerülne a sor. Az életmentő vesecsereklub segít kellően motivált élő donorokat találni, ami végső soron a többi beteg esélyeit is javítja."

Neves közgazdászok és orvosok is felfigyeltek a jelenségre, és a közelmúltban számos tanulmány jelent meg (lásd [62], [63], [64], [65], [14] és [66]) melyeknek fő célja egy olyan központi adatbázis és párosító eljárás kidolgozása, amely minél igazságosabb, és hatékony módon ad választ erre a társadalmi kérdésre.

A felállított modellek egy része csak párok közötti cseréket enged meg, másik része engedélyezi, hogy hosszabb láncban történjen a csere. Ez utóbbinak nagy hátránya, hogy a műtéteket a résztvevő párok – érthető okokból – szeretnék egyidőben elvégeztetni, ez már páros cserénél is 4 műtőszobát és orvoscsoportot igényel. A továbbiakban már csak páros cserével foglalkozom.

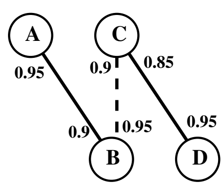
Ezen speciális párosítás-piac szereplői a beteg-donor párok (általában házaspárok). Akkor lehetséges a kapcsolat két szereplő között, ha mindkét pár donorjának veséje alkalmas beültetésre a másik pár betegének. Innen a modellek ismét ketté ágaznak. Tekinthetjük úgy, hogy nem számít mennyire jó az egyezés és csak annyit mondunk hogy, ha elég nagy valószínűséggel sikeres lehet mindkét műtét, akkor megengedett a kapcsolat (vagyis 0 vagy 1 kimenetet adunk minden párra nézve). A program célja ebben az esetben, hogy minél több lehetséges párt hozzunk össze, vagyis a **lehetséges átültetések számát** maximalizáljuk. A legtöbb tesztelést ilyen típusú programmal végezték el a közelmúltban.

Ez az eset természetes módon reprezentálható egy gráffal ahol a pontok megfelelnek a szereplőknek, vagyis a beteg-donor pároknak. Két pont között pontosan akkor vezet él, ha a donáció keresztbe mindkét beteg számára lehetséges. Feladat egy maximális méretű párosítás megtalálása. Ez (ahogyan a Matematikai összefoglalóban ismertetésre került) megoldható az Edmonds-Gallai algoritmussal.

Abban az esetben, ha mégis figyelembe vesszük az egyezések mértékét, vagyis azt a becsült valószínűséget amellyel a műtét sikeres lehet, akkor elméleti értelemben bonyolultabb problémát kapunk, de a gyakorlatban kedvezőbb eredményre juthatunk. Habár a legnagyobb kérdés, hogy mi számít kedvező eredménynek?

Amennyiben a szereplők szabad választását tekintjük elsőrendű feltételnek, akkor a feladat egyértelműen egy stabil párosítás problémának felel meg (ahogyan a [63] cikkben is megjegyzik a szerzők). Ugyanis minden szereplő szeretne olyan párban benne lenni, ahol a beültetés sikerességének valószínűsége számukra a lehető legnagyobb. (A blokkoló pár itt egy adott párosítás esetén olyan két beteg-donor párnak felel meg, akik mindketten kedvezőbb feltétellel nézhetnének a műtét elé, mint az eredeti párosításban.) Több érv is szól azonban amellett, hogy mégse ilyen párosításra törekedjünk. Az egyik, hogy nem lehet mindig garantálni a stabil megoldás létezését. A másik, sokkal súlyosabb érv viszont a társadalmi összhaszon, amely kárt szenvedhet. Lássunk erre egy egyszerű példát:

Példa Négy szereplőnk (beteg-donor párunk) van. A lehetséges kapcsolatokban a műtét sikerességének becsült valószínűségei a következők:



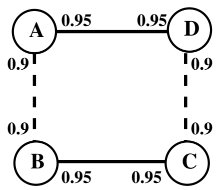
$$
\begin{array}{ll}
pr_A(\{A-B\}) = 0.95 & pr_B(\{A-B\}) = 0.9 \\
pr_B(\{B-C\}) = 0.95 & pr_C(\{B-C\}) = 0.9 \\
pr_C(\{C-D\}) = 0.85 & pr_D(\{C-D\}) = 0.95
\end{array}
$$

Vagyis például a B pár betege részére 0.9 annak a becsült valószínűsége, hogy a műtét sikeres lesz, ha a vesét a A pár donorjától kapja és 0.95, ha a C pár donorjától. Tegyük fel, hogy a szoftver akkor tekint lehetségesnek egy műtétet, ha a sikerességének becsülhető valószínűsége legalább 0.8.

Könnyen láthatjuk, hogy a stabil párosítás ez esetben a $B-C$ kapcsolat létrejöttét jelentené, míg a preferenciák nélküli esetben a maximális méretű párosítás két pár, az $A-B$ és $C-D$ párok létrejöttét teszi lehetővé.

A legnehezebb kérdés, hogy mit tartunk igazságosnak? A szabad választás jogát mindenekelőtt, vagy egy pici érdeksérelmet még indokolhatónak tartunk akkor, ha ezzel nagy mértékben nő más szereplők hasznossága? Én az utóbbival értek egyet. Mindazonáltal nem szabad teljesen megfeledkeznünk a valószínűségekről! Lássunk egy újabb példát.

Példa Ismét négy szereplőnk van, a valószínűségek a következők.



$$
\begin{array}{ll}
pr_A(\{A-B\}) = 0.9 & pr_B(\{A-B\}) = 0.9 \\
pr_B(\{B-C\}) = 0.95 & pr_C(\{B-C\}) = 0.95 \\
pr_C(\{C-D\}) = 0.9 & pr_D(\{C-D\}) = 0.9 \\
pr_D(\{D-A\}) = 0.95 & pr_A(\{D-A\}) = 0.95
\end{array}
$$

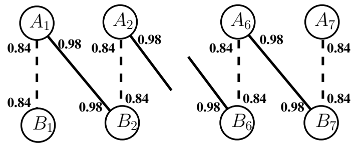
Amennyiben a program nem tesz különbséget a pontos valószínűségek között, hanem ismét 80% felett hozza azt a döntést, hogy megengedett a műtét, és az alatt pedig nem, akkor fontos információkat veszíthetünk. Jelen esetben például az $A-B$, $C-D$ illetve az $A-D$, $B-C$ párokat egyenlő eséllyel választja a program. Pedig józan ésszel nem hiszem, hogy bárki az első mellett döntene, hiszen a **sikeres műtétek várható száma** a második esetben egyértelműen nagyobb.

Mi lenne tehát, ha az elvégzett műtétek száma helyett inkább a sikeres műtétek várható számát igyekeznénk maximalizálni? Elfogadhatóan hangzik, de vajon kivitelezhető-e?

Igen. Ha egy lehetséges kapcsolatnak megfelelő élnek a gráfban azt a súlyt adjuk, amekkora a két beteg sikeres műtétjének becsült valószínűségeinek összege, akkor a maximális összsúlyú párosítás a gráfban megfelel egy olyan párosításnak, ahol a sikeres műtétek várható száma maximális. Ez a feladat szintén megoldható az Egmonds-Gallai algoritmus élsúlyos változatával.

De még nem végeztünk. A következő példa egy újabb anomáliára hívja fel a figyelmet.

Példa A tizennégy szereplőt érintő huszonnyolc lehetséges műtét becsült valószínűségei a következők.



$$
\begin{array}{ll}
pr_{A_1}(\{A_1 - B_1\}) = 0.84 & pr_{B_1}(\{A_1 - B_1\}) = 0.84 \\
pr_{A_1}(\{A_1 - B_2\}) = 0.98 & pr_{B_2}(\{A_1 - B_2\}) = 0.98 \\
\ldots & \ldots \\
pr_{A_6}(\{A_6 - B_7\}) = 0.98 & pr_{B_7}(\{A_6 - B_7\}) = 0.98 \\
pr_{A_7}(\{A_7 - B_7\}) = 0.84 & pr_{B_7}(\{A_7 - B_7\}) = 0.84
\end{array}
$$

Itt összesen két szóba jöhető párosítás van. Az egyikben 14 műtét fog megtörténni az $A_i - B_i$ párok között, a másikban csak 12 műtét az $A_i - B_{i+1}$ lehetséges párok között. Ha kiszámoljuk, a sikeres műtétek várható száma mindkét esetben megegyezik ($14 \times 0.84 = 12 \times 0.98$). Józan ésszel megint a második párosítást mellett döntenénk, hiszen miért okozzunk kettővel több donornak szenvedést, ha ezzel nem nő az optimum értéke.

Észre kell vennünk, hogy idáig egyáltalán nem vettük figyelembe a donorok érdekeit! Pedig egy szereplő, vagyis egy beteg-donor pár hasznosságát nem csak a beteg sikeres beültetésének becsült valószínűsége határozza meg, hanem a donor mindenképpen bekövetkező áldozata is. Ezért az összhasznosságot valamilyen formában csökkenteni kell. Ez lehet egy egységes konstans érték (a donor becsült áldozata) minden szereplő esetében. A mértékét megbecsülhetjük úgy, hogy a beteg várható életkilátásának növekedését hasonlítjuk össze a donor várható életkilátásának csökkenésével. Ha például sikeres műtét esetén a beteg várhatóan 20 évvel fog tovább élni, míg a donor mintegy 2 évet veszít, akkor a konstanst választhatjuk mondjuk 0.1-nek. (De erről természetesen érdemes vitázni, hiszen cadaver módon is megvalósítható a donáció.)

A módosítás nyomán most már nem a sikeres műtétek várható számát akarjuk maximalizálni, hanem az összes műtétben résztvevő ember **várható életkilátásainak összegét**, amit tekinthetünk a résztvevők összhasznosságának. Technikailag a probléma jellege nem változik, de felértékelődnek a valószínűségek közti különbségek. Tipikusan kevesebb műtét jön létre, mint az előző két algoritmus esetében és végeredményben mindhárom fenti példában az igazságosabbnak gondolt megoldást választja a program.

Javaslatom összefoglalva a következő. Megadott időszakonként tegyük lehetővé önként jelentkező pároknak, hogy egy adatbázisban regisztráltassák magukat. A jelentkezési határidő lejártával az utóbb ismertetett módszerrel keressünk szoftverünk segítségével egy olyan párosítást, ahol a várható hasznosságok összege maximális. A műtét a megszokott etikai szabályok szerint legyen anonim. Amennyiben egy műtét esetleg sikertelen volt, akkor igyekezzünk kompenzálni a beteget. Tegyük előre például a várólistán, mondjuk arra a legelső helyre, ahol egy olyan beteg volt, aki az aktuális program keretében lekerült a listáról. Így nem sérül senkinek az érdeke, aki nem vesz részt a programban, viszont a kompenzáció plusz motivációt jelenthet a sikertelenségtől tartó párok részére. [40]

[40]Érdekesség, hogy gyakorlatilag így pontosan ugyanazt a megoldást kapjuk, mintha – a szereplők egyenrangúságát feltételezve, egyenlőnek véve mindenki hasznosságát egy egységnyi kifizetésre – megengedtük volna a transzfert a szereplők között. Etikailag azonban jelentős az eltérés, hiszen a valóságban a társadalmi egyenlőtlenségek miatt az egyes szereplők pénzben kifejezett hasznossága az egészségüket illetően nagy mértékben eltér. Az emberiesség, a társadalmi igazságosság és szolidaritás egyik megnyilvánulása, hogy az egészséghez való jogot alapvetőnek gondolhatjuk. Igazságtalannak pedig azt, ha valaki pénzért jelentősen jobb ellátásban részesülhet, vagy ha – extrém, de sajnos nem ritka esetben – a szegénység akár egy élet elvesztésének is oka lehet. Emiatt sok országban úgy alakítja az etikai norma a törvényi keretet, hogy az egészségügyi alapellátás minden embernek járjon. A kérdés persze az, hogy mi számít alapellátásnak.

8. Társulási piac

A modell annyira általános, így a vizsgálat tárgyát képezhető témakörök spektruma olyan széles, hogy gyakorlatilag a társadalmi és gazdasági kapcsolatok nagy többsége elemezhető lenne ebben a kontextusban. Ezért a fejezetben nem törekszem arra, hogy részletekbe menő leírásokat adjak, csupán megemlítek néhány példát az együttműködések szabályozására és a közösen elért haszon elosztási mechanizmusaira. Talán már ez is elég inspirációt ad néhány Olvasónak a felvetett kérdések – vagy ezekhez hasonló problémák – továbbgondolására.

8.1. Példák kifizetés nélküli társulásokra

A szereplők most nem csak párkapcsolatokat, hanem tetszőleges nagyságú társulásokat alkothatnak. A következő példákban szereplő együttműködésekre nem jellemző a szereplők közötti kifizetés.

Általános szobatárs probléma

Kollégiumok vezetése gyakorlatilag minden szemeszter elején szembesül a szobabeosztás készítésének problémájával. Az általam ismert hazai kollégiumokban vagy a diákok képviselői vagy a kollégium igazgatója készíti ezt el. Bizonyos mértékben mindenhol kikérik a diákok véleményét. Úgy tudom, hogy az például természetes, hogy ha egy lehetséges szoba lakói mind kifejezésre juttatják, hogy együtt szeretnének lakni, akkor nekik ezt meg is engedik. Nem tudok azonban arról, hogy bárhol párosító algoritmust működtetnének ebből a célból.

Matematikailag, ha stabil megoldásra törekszünk, akkor mint korábban említettem a probléma nem is kezelhető általánosan polinomiális idejű algoritmussal. Csak igen speciális esetekben.

Dimitrov és társai [19] bemutattak két olyan egyszerű stabil társítási problémát, amelyekben mindig létezik valamilyen stabil megoldás. Az első a *barátok értékelésén* alapszik, a másik pedig az *ellenségek elkerülésén*. Az elsőben, ha egy szereplő összehasonlít két lehetséges társulást, akkor azt fogja elsősorban kedvelni, amelyikben több a barátja. Ha azonos számú a barátainak száma, akkor azt tartja jobbnak, amelyikben kevesebb az ellensége. A másodikban pont fordítva, egy játékos azt a társulást szereti elsősorban amelyikben kevesebb az ellensége, azonos számú ellenség esetén, pedig azt, ahol nagyobb a barátainak száma. Ha mindkét érték megegyezik, akkor a két társulás számára indifferens. Megmutatták, hogy az első esetben a játéknak mindig létezik erősen stabil megoldása, a második esetben pedig csak a gyengén stabil megoldást lehet garantálni.

Javaslatom tehát a szobabeosztás készítőihez, hogy a diákoktól csak a barátaik és ellenségeik nevének bejelölését kérjék a kollégium internetes portálján (természetesen titkos módon). A program által adott szobabeosztással szemben biztosan nem fog jönni olyan panasz, amelyben az új lakók közül senki sem járna rosszabbul, de valamelyiküknek szigorúan javulna a helyzete. A program triviálisan teljesíti azt a feltételt is, hogy egy előre megalakult szoba érvényesíteni tudja igényét oly módon, hogy a lakói csak egymást jelölik be barátnak. Nem számít, hogy hány ágyasak a szobák.

Kapcsolati hálók

A társadalmi és gazdasági hálók kialakulásának vizsgálatához neves közgazdászok egy munkájukban [34] a stabil párosítást említik, mint lehetséges leíró modellt. Két szereplő, ha találkozik és kölcsönösen úgy gondolják, hogy a kapcsolat kiépítése számukra hasznos, akkor jó eséllyel létre is jön az ismeretség. Ha viszont két fél közül az egyiknek már nem éri meg részt venni egy kapcsolatban, akkor racionális módon azt fel fogja bontani.

A társadalmi hálókról igen nagy számban jelentek meg elemzések a közelmúltban, nem célom, hogy akár csak egy vázlatos leírást is próbáljak adni erről. Pusztán egy hazai példa az *iWiW* internetes társkereső portál kapcsán szeretnék néhány mondatot hozzáfűzni a témakörhöz.

Az internetes portál célja az ismerősök megtalálása, és velük való kapcsolattartás elősegítése. A regisztrált felhasználók száma mintegy félmillió (lásd [76], csak Budapesten 2006. április 14.-én 283040 felhasználó van és közöttük pontosan 17.319.041 kapcsolat). A világ sok országában hasonlóan népszerűek az ilyen jellegű honlapok. Az Egyesült Államokban például a MySpace 67 millió felhasználóval büszkélkedhet (lásd [82]).

A siker titka, hogy a felhasználók a honlapot valóban saját névvel és általában teljes, részletesen kitöltött profillal, javarészt saját képekkel használják. Így a rendszer ténylegesen fontos eszköz lehet a kapcsolati hálón keresztül történő információáramlásban. Ha az embernek fontos közölnivalója van, akkor azt egy üzenetben eljuttathatja minden ismerősének (vagy egy kiválasztott belső csoportnak). Ha kevésbé fontos információt szeretne megosztani ismerőseivel, akkor csak az üzenőfalra ír. A felesleges levelek írását ugyanis a szereplők nem díjazzák, és talán pontosan ebben van a lényeg. Aki ugyanis nem tartja be azt a kimondatlan etikai normát, hogy csak fontos információkat közlünk levélben és nem teszünk fel butaságokat a faliújságra, azt egyetlen gombnyomással bárki kiteheti az ismerősei közül.

Ebből a szempontból valóban hordoz bizonyos hasonlatosságot a stabil párosítási modellekkel az ismerősi hálók internetes működése. Regisztrált ismeretséget létrehozni ugyanis csak kölcsönös visszaigazolás révén lehet, megszakítani viszont az egyéni érdeket követve bármikor. Ez a rendszer a kapcsolatok ápolására valóban kiváló lehetőséget nyújt, ma még beláthatatlan következményekkel a társadalmi információs hálózatok alakulására nézve.

8.2. Példák kifizetéses társulásokra

A bonyolultabb többszereplős társadalmi együttműködések döntő többsége elképzelhetetlen transzferek nélkül. Sőt, a legtöbb esetben a létrejött társulások, mint adottságok jelennek meg, és az egyetlen kérdés a közös haszon elosztásának mikéntje.

A legtermészetesebb, de egyben talán a legkomplexebb példaként említhetjük egy ország lakosságát, melynek szereplői együttműködésre vannak ítélve. Az egyéneknek ebből származó haszna igen sokrétű, az állam által szavatolt katonai biztonságtól a környezetvédelmen át, a törvényes rend biztosításáig. Emellett – az állami szerepvállalás eltérő mértékétől függően – az oktatás, egészségügy, úthálózat kiépítése is állami szolgáltatásként befolyásolhatja az állampolgár hasznosságát. A működtetés költségéhez azonban mindenki különböző mértékben köteles hozzájárulni, esetenként vissza is kap az államtól valamennyi transzfert. Az állami szerepvállalás, a redisztribúció mértéke a fejlett országokban is igen eltérő lehet. Jellemző példaként szokás említeni az alacsony állami szerepvállalásra a liberális gazdaságpolitikájú angolszász országokat, míg ellenpontként legszívesebben a skandináv jóléti államokat hozzák fel az állam jótékony beavatkozásának hívei.

Általánosan elmondható, hogy az egyes társadalmi vagy gazdasági csoportok érdekeinek képviseletét – az együttműködés mikéntjének, illetve a kifizetések mértékének szabályozására – a demokratikus jogállamokban elsősorban a politikai pártok jelenítik meg, de egyre elterjedtebbek a civil kezdeményezések, társadalmi megmozdulások is. Ez utóbbiak leginkább az etikai normák alakításával közvetlenül, vagy közvetetten befolyásolják a döntéshozókat az együttműködések terét szabályozó törvényi keretek alakításában, legyen a cél akár a női egyenjogúság, a környezetvédelem, a bicikliutak építése, a könnyűdrogok legalizálása (vagy fogyasztásának további szigorítása), esetleg egy konkrét törvény (mondjuk a francia CPE) megváltoztatása, eltörlése.

Kérdés, hogy egy adottnak vett együttműködés esetén a haszon elosztása mikor nevezhető igazságosnak? Ennek egy igen fontos feltétele lehet a stabilitás, vagyis hogy a szereplők egyik csoportja se tudja megvétózni a kialakult társadalmi, gazdasági egyensúlyt. De amennyiben létezik stabil megoldás, még ezek közül is érdemes egy olyat választani, amelynek előállítása viszonylag átlátható módon megvalósítható és ezért a szereplők a szétosztás elvét játékszabályként (etikai vagy törvényi keretként) előre el tudják fogadni.

Egy példa a Talmudból[41]

Az elosztás szabályozásának egy ősi példáját találhatjuk meg a Talmudban. Ezt talán szabad úgy tekintenünk – hasonlóképpen a többi világvallás írásba foglalt nézetrendszeréhez – mint a kor helyi etikai normáinak rendezett kivonatát, amely később a zsidó törvénykezés alapjává vált.

Különlegessége, hogy az ebben a – problémakör megoldására iránymutatásként szolgáló – példabeszédben leírt egyes eredmények megegyeznek az adott játékra természetes módon definiálható kooperatív játék egy kiemelt megoldásával, a nukleolusszal.[42] Játékelméletben ezt az elosztási elvet tartják az egyik legigazságosabbnak napjainkban.

A rabbinak a példabeszéd szerint arról kell döntenie, hogy egy elhunyt vagyonát miként ossza fel a hitelezők között. Az A hitelező 100, a B 200, a C 300 pénzegységre tart jogosan igényt, de az elhunyt vagyona nem elég mindegyik kifizetésére. Három esetre is megismerhetjük, hogy mi lenne az igazságos ítéletet. Az elsőben 100, a másodikban 200, a harmadikban 300 pénzegység volt az elhunyt vagyona, az elosztások pedig a következők:

Vagyon	A	B	C
100	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$	$33\frac{1}{3}$
200	50	75	75
300	50	100	150

Az első (az egyenlő), illetve a harmadik (az arányos) elosztás viszonylag természetesnek tűnik, a másodikhoz viszont elég nehéz indoklást találni. Aumann és Mashler [5] három lehetséges elosztási elvet ismertetett, amelyek pontosan ezeket a megoldásokat adják. Az egyik ezek közül a – feladathoz természetes módon definiált – kooperatív játék nukleolusza.

Legyen egy társulás által elérhető hasznosság egyenlő azzal a pénzmennyiséggel, amennyi a társuláson kívüli összes hitelező kifizetése

[41] Ezt a példát Solymosi Tamás „Kooperatív játékelmélet" című óráján hallottam, az eredeti leírás Aumann és Mashler [5] cikkében található meg.

[42] A nukleolusz definíciója a Matematikai összefoglalóban megtalálható. Ez mindig stabil megoldást jelent, ha a játék magja nem üres.

után megmarad. Ezen hasznosságokra nézve a fenti elosztások valóban megfelelnek a játékok nukleoluszának.

A példabeszéd fontos tanulsággal szolgálhat napjainkban is, hiszen pontosan ilyen szituációk fordulnak elő a gazdasági csődhelyzetekben. Ezek kezelése, a hitelezők kártalanításának módja átlátható, minden szereplő által elfogadható törvényi szabályozást igényel. Ezt az alkalmazást taglalja Aumann és Mashler is fenti munkájában.

G-14, avagy egy blokkoló koalíció[43]

A sportágak legtöbbjében országos és nemzetközi szintéren is nonprofit szakági szervezetek koordinálják a versenyeket. Akadnak azonban példák, és főleg a „pénzesebb” sportoknál, ahol a versenyzők, vagy klubjaik összefognak és közösen egy új professzionális szervezetet vagy ligát hoznak létre. Érdekes kérdés annak vizsgálata, hogy milyen okok vezetnek ahhoz, hogy egy adott pillanatban a sportág szereplői egy új, közös társulást alakítsanak. A legtöbb esetben természetesen a nagyobb haszon reménye.

Ilyen blokkoló koalíció létrejöttére említhető példaként az a néhány éve lejátszódott eset, amikor a világ legkiválóbb sakkozóinak többsége, az akkori világbajnok, Kaszparov vezetésével egy új profi szövetséget hozott létre a hivatalos nemzetközi sakkszervezet, a FIDE ellenében. Tették ezt azért mert sokallták a szövetség által elvett részesedést és egyéb korlátozó szabályokat.

Hasonló aktuális jelenség figyelhető meg az európai futballcsapatok esetében. A G-14-nek elnevezett társulás, amely ma 18 nívós európai klubcsapatból áll (köztük olyan nevek, mint a Barcelona, Real Madrid, Porto, Liverpool, Arsenal, Manchester United, PSG, Ajax, Bayern München, Juventus, Milan) igen erőteljesen lép fel érdekei védelmében a nemzetközi labdarúgó-szövetségekkel (FIFA, UEFA) szemben. Az ok természetesen most is az anyagiakban keresendő, hiszen itt valóban súlyos összegekről van szó.

A csapatok keveslik a FIFA és az UEFA által szervezett rendezvényekből (főként a Bajnokok Ligájából) nekik juttatott részesedést, és ellenzik a FIFA azon szabályozását is, mely szerint a nemzeti válogatottak mérkőzéseire a csapatoknak kötelességük elengedni a játékosaikat. A nyomásgyakorlásuk alapja egy olyan egyre többször hangoztatott eshetőség, hogy a hivatalos szervezetek keretein kívül egy saját bajnokságot hoznak létre (az amerikai profi ligák: NBA, NHL, NFL mintájára). A blokkoló társulás tehát fel tud mutatni egy olyan lehetséges együttműködést, amely megvalósítható és amelyben várhatóan mindannyian jobban járnak. (Kérdés, hogy a szurkolók mit szólnak mindehhez.)

[43] Elsősorban a [79] újságcikkből származnak az információk.

Európai Unió

Az országok közötti gazdasági kapcsolatok meghatározó tényezője a kereskedelmi egyezmények rendszere. A közelmúltban megfigyelhető változások azt mutatják, hogy a kereskedelem liberalizációja felerősödik, egyre kiterjedtebb szabadkereskedelmi övezetek jönnek létre. Ez a komplex rendszer kicsit leegyszerűsítve szintén modellezhető egyfajta játékként, ahol az országok a szereplők és a kereskedelmi övezetek, mint társulások összességében a világ országainak egy partícióját adják.

A szabadkereskedelmi övezet létrehozása jó eséllyel többlethasznot jelent a benne résztvevő szereplőknek.[44] Erre alapozódott az Európai Unió sikertörténete is. A liberalizációt követő első években a hat társult ország gazdasági teljesítménye töretlenül növekedett.

Van azonban egy fontos különbség: a meglévő sikeres szövetségek ritkán bomlanak fel. A szövetségbe – a résztvevők hozzájárulása esetén – új tag beléphet, vagy két szövetség kapcsolatot alakíthat ki, akár egyesülhet is. Fontos tehát a dinamika, nem mindegy, hogy hogyan alakul a történelem. Nagy-Britannia hosszú évekig sajnálhatta, hogy nem vett részt az első együttműködésben. A kimaradt országokból megalakított EFTA ugyanis nem lehetett hasonlóan sikeres, majd ennek beismerése után sem csatlakozhattak még egy jó ideig az akkori francia elnök csökönyössége miatt.

Az Európai Unió azonban nem csak egy kereskedelmi társulás, hanem egy igen komplex együttműködés. Az országok (mint szereplők) haszna ebből nagyon sokrétű lehet, melyeknek csak egy része mérhető pénzben. A transzferek elosztása ennek tükrében bonyolult feladat. A költségvetési időszakot megelőzően az egyes országok számára fontosnak tartott közösségi politikákat kell összhangba hozni az egyéni tehervállalások mértékével. Erre extrém példaként említhető a franciák által magasra dimenzionált agrárpolitika, melynek elfogadásáért cserébe Nagy-Britannia konkrétan meghatározott transzfert kap minden évben. Az együttműködés mikéntje mellett tehát a közösen elért hasznok elosztása ez esetben is az országok közti játék két legfontosabb kérdése.

[44]Ez a feltevés természetesen nem mindig igaz, a megfigyelések szerint, ha a felek gazdasági fejlettsége között jelentős a különbség, akkor a liberalizációnak gyakran károsultjai lehetnek a fejletlen országok. Azonban, ilyen esetben sem mindig elvetendő az együttműködés, ha a társulás összhaszna pozitív, akkor transzfer révén mindegyik fél számára kedvezővé tehető a kapcsolat. Erre példaként említhetjük a Loméi Konvenciókat. Ennek keretében a liberalizáció különböző biztosítékokkal valósul meg, és ezen túlmenően az EU által fizetett egyéb transzferek teszik végül a kapcsolatot remények szerint kölcsönösen hasznossá.

Az etikai alapokon nyugvó közös törvényi keretek megalkotásának célja pontosan ezen együttműködés szabályozása. Az Európai Unió létrejöttének – bár voltak nem elhanyagolható biztonságpolitikai okai – elsődlegesen a belső kereskedelem liberalizációjával beindított piaci mechanizmusok igazolták a sikerességét. A középtávú fellendülést azonban a hetvenes években – többek között az olajválságok hatására – recesszió követte. Emellett megjelent sok új kihívás (környezetvédelem, regionális különbségek kezelése, technológia fejlődés), amely szintén közös koordinációt igényelt.

A világpiaci trendekhez igazodva az elmúlt két évtizedben is jelentős lépéseket tett a közösség a piaci mechanizmusok előmozdítására. Ennek egyik fő eleme a piacok további liberalizációja volt, ami több szektorban, például a távközlésben igen sikeresnek bizonyult. A másik pedig a gazdaságpolitikák összehangolása, amely a – fiskális szigor megkövetelésével – a maastrichti kritériumok teljesítése után, végeredményként elvezetett a közös valuta létrejöttéhez. Emellett viszont a közös törvényi szabályozás egyre több és több területre terjedt ki, bürokratikus koordinációként elősegítve a közösségi célok megvalósulását, megfelelve a felerősödött etikai elvárásoknak. Itt rengeteg példát lehetne hozni az újonnan létrehozott, illetve egyre finomabban szabályozott közös politikákra.

Végezetül hadd szemléltessem a fent említett folyamatokat, a – finanszírozás nagyságát tekintve is – legnagyobb súlyú közös politika, az agrárium szabályozásának változásaival. Az agrárpolitika célja kezdetben a termelékenység növelése, az önellátás megteremtése, a mezőgazdaságból élők biztos megélhetésének garantálása magas árak révén. A hatvanas-hetvenes években így a közös piacra építve egy igen erőteljesen protekcionista vámrendszerrel sikerült feltornázni a belső árakat, és ennek eredményeként a termelés jelentősen megugrott.

A piaci mechanizmusok és a technológiai fejlődés előmozdította a termelés koncentrációját, hatékonyságának növekedését. A – most már túltermeléssel küzdő – rendszer fenntartása egyre nagyobb költségekkel járt, miközben a bevételekből egyre kevesebben részesedtek, a mezőgazdaságban dolgozók száma a felére csökkent, a vidék elnéptelenedése folytatódott. Emellett erős külső nyomás is nehezedett a döntéshozókra a világkereskedelmi szervezetek részéről. Ennek folyományaként a GATT uruguayi fordulójának végén az Unió ígéretet tett a támogatások lefaragására, a támogatott export visszafogására, amelyhez a belső árak jelentős csökkentésére volt szükség.

A reformok nyomán különleges kettősség jelent meg az agrárpolitikában. Míg a piaci mechanizmusok csökkenő anyagi támogatással működtek tovább, addig az agráriumban dolgozók jövedelmének jelentős részét egy új, közvetlen kifizetéses formában biztosították közösségi szinten. Ez egy hatalmas léptékű, kiterjedt bürokratikus szabályozás létrejöttét tette szükségessé, ahol minden egyes gazda – temérdek adminisztráció után – már a termeléstől függetlenül kapott, és kap ma is jövedelmet közvetlenül a központtól. A költségek igen jelentősek, a legújabb csatlakozási hullám után – amely során tíz alacsony fejlettségű és sok embert foglalkoztató mezőgazdasággal rendelkező ország lett tagja a közösségnek – az új belépők számára nem is tették 100%-ban elérhetővé a támogatásokat[45], hiszen az a költségvetés összeroppanását okozhatta volna. Az újabb reformokat azonban nem lehet sokáig elodázni.

A probléma lényegét érdemes újra átgondolni. Ha a piaci koordináció tiszta formában lenne domináns, akkor főként a kistermelők igen kiszolgáltatottá válnának. A falusi gazdálkodás ellehetetlenülésével az egész társadalom nagy károkat szenvedne, hiszen a falvak elnéptelenedése nemcsak a munkanélküliek számának emelkedésével járna, hanem a kulturális örökségek, a rendezett, tiszta, emberléptékű természetes környezet, vagyis a vidék és hozzá tartozó szemléletmód veszítene értékéből. Ezen alapulnak az etikai normák, melyek végső soron bürokratikus koordinációban realizálódnak. Ennek felismerésével kezdődött meg a mezőgazdasági politikák kettébontása agrárgazdasági szabályozásra és vidékfejlesztési politikára. Míg az előbbiben fokozott mértékben érvényesülhetnek a hatékony piaci mechanizmusok, addig az utóbbiban az etikai értékek tisztábban, átláthatóbban valósulhatnak meg bürokratikus szabályozás útján.

Globális kérdések

Vannak olyan társadalmi, gazdasági problémák, ahol az érintett szereplők köre – legyen szó országokról, vállalatokról vagy az egyszerű emberekről – kiterjed az egész glóbuszra.

A leglényegesebb kérdés a gazdaság globalizációja. Chikán [15] megfogalmazása szerint a 20. század a piaci koordináció diadalát hozta. De ahogy Kornai megállapította, a piaci koordináció a gazdaságban a leghatékonyabb, mégsem működhet egymagában.

A szovjet rendszer összeomlásakor a liberális szemlélet diadala jelent meg a John Williamson által 1989-ben megfogalmazott washingtoni konszenzusban. Sok közgazdász – így Antal és társai [75] – ma is ezt tekintik irányadónak. Ezzel szemben Ferge Zsuzsa [77] szerint ez a nézetrendszer már idejétmúlt, és a Joseph Stiglitz által 1998-ban leírt post-washingtoni konszenzust állítja vele szembe. Az új, árnyaltabb megközelítés szerint „a fejlődés környezetileg fenntartható, méltányos és demokratikus legyen, ... az állam szerepének felértékelése, szegénységgel szembeni fellépés, a döntéshozatal demokratizálásának igénye..." kerül előtérbe. Ferge Zsuzsa a vitában felidézi Amaryta

[45]Az első évben az új tagok a támogatás 25%-át kaphatták meg (ezt minden ország saját erőből még 30 %-kal kiegészítheti), majd évenként 5%-al emelkedik ez az arány.

Sen gondolatait: „a piaci mechanizmusnak olyan világban kell működnie, amelyben sok más intézmény is van. Szükségünk van ezek hatalmára és védelmére. Mindezt a demokratikus gyakorlat, a civil és emberi jogok, a szabad és nyílt média, az alapvető oktatási és egészségügyi intézmények, a gazdasági biztonsági hálók és természetesen a női szabadságjogok jelentik.”

A gazdaság koordinációját elemezve Chikán tanulmányában kifejti, hogy leggyorsabban és legmélyebbre hatóan a pénzügyi szféra globalizációja ment végbe a nemzetközi gazdaságban, míg a reálszféra – bár az informatikai és logisztikai fejlődés révén nagyot lépett előre a globalizálódás felé – jelentős lemaradásban van hozzá képest. „A reálszféra tetején úszik egy pénzügyi buborék, amely a világban mozogva különböző zavarokat okoz. A pénzügyi és a reálfolyamatok elszakadnak egymástól, és az előbbiek ott is problémákat okoznak, ahol ezt a reálszféra működése egyáltalán nem indokolná (a szakértők szerint ennek iskolapéldája a tavalyi indonéz válság).” Ugyanez a gondolatmenet jelenik meg Soros György [72] könyvében, aki a globalizáció legnagyobb veszélyét pontosan a nyitott országok pénzügyi rendszerének kiszolgáltatottságában látja, a korlátlanul mozgó forrótőkével szemben. Példaként hozza a Távol-Keleti pénzpiacok összeomlását.

A reáltőke optimális allokációja is nagy problémákat tud előidézni, elsősorban lokális szinten. Hazánkban is egyre többször kell szembesülnie a városok vezetőinek a keletre távozó multinacionális cégek után maradt munkanélküliséggel. A világgazdasági folyamatok szabályozására hivatott intézmények (IMF, WTO, GATT) csak lassan képesek – és néhány befolyásos ország ellenérdekeltsége miatt nem is mindig akarják – megvalósítani a felgyorsult gazdasági globalizáció társadalmi értékek mentén történő befolyásolását. Talán alapvetően ez a konfliktus manifesztálódik egyre gyakrabban radikális ellentüntetések formájában.

Vannak azonban sikeres kezdeményezések is. Chikán [17] munkájában a Limai Nyilatkozat hatását boncolgatja, és megállapítja, hogy az 1977-ben elfogadott keretszabályozás hatékonynak és ezért időtállónak bizonyult. A nyilatkozat a számvevőszéki szervezetek alapelveit rögzítette elsősorban az akkori fejlett országok részére. Ezek célja, a leírtak szerint, nem csak az államhatalmi működés pénzügyi szabályosságának figyelemmel kísérése, hanem a működés hatékonyságának elemzése is. Chikán ezt a tiszta és átlátható keretrendszert példaértékűnek tartja a piaci mechanizmusokat szabályozó bürokratikus koordinációk között.

A második fontos globális társadalmi probléma, amelyről szeretnék szót ejteni a környezetvédelem. Az elmúlt évtizedekben nyilvánvalóvá vált, hogy a környezetszennyezés nem ismer határokat, és ezért a környezet védelme csakis egy globális, mindenkire vonatkozó szabályozással lehet megoldható. A világszintű megegyezés, azonban néhány önző szemléletű, és önállóságát féltő ország (többek között az Egyesült Államok) miatt nem jött létre, a kiotói egyezményt néhány jelentős állam nem ratifikálta. Ez vezetett oda, hogy a civil társadalmi szerveződések, és radikális csoportok (GREENPEACE) egyre nagyobb nyomást fejtenek ki a döntéshozókra a társadalmi értékek védelmében.

Chikán [15] szerint a piaci mechanizmust működtető gazdasági szereplők profitmaximalizálók, a bürokratikus koordinációt végrehajtani hivatott politikusok szavazatmaximalizálók. A társadalom értékei megjelennek etikai koordinációként és áthatják a rendszert. A fogyasztói választás révén a piaci mechanizmus is igazodhat a társadalmi értékekhez (erről szól például a környezettudatos alternatív vállalatok fogalma), de leginkább a bürokratikus koordináció hivatott megjeleníteni a társadalom értékítéletét. Ha ez nem történik meg, vagy csak késedelemmel, reaktív módon, akkor a társadalom más úton, elsősorban civil kezdeményeződések formájában nyilvánítja ki ítéletét, amely a mai információs rendszer, média révén könnyen válhat politikai kérdéssé, ez a demokratikus szisztéma alapján kikényszerítheti a bürokratikus fellépést.

Hazai példaként említhető minderre a bősi vízlépcső, vagy akár a zengői lokátor kérdése, amely egy civil kezdeményezésből társadalmi üggyé ált, és végül a vezetői döntés megváltoztatását hozta. Nemzetközi szinten azonban a közös szabályozás jóval komplikáltabb. Szerencsére az Európai Unión belül már egy igen tág „védelmi zónába" kerültünk, de még a mai napon is fenyegethetik levegőnket, vizeinket olyan külső hatások, amik olyan környezeti tragédiákhoz vezethetnek, mint a legutóbbi tiszai ciánszennyezés. Valódi megoldást csak egy globális bürokratikus koordináció, egy minden ország által elfogadott környezetvédelmi törvényi szabályozás jelenthet.

Végül szeretném megjegyezni, hogy a technikai fejlődés a szociális kapcsolatokban is milyen hatalmas változásokat jelenthet. A lehetőségek tere elsősorban az internet révén hihetetlen gyorsasággal tágul. A világhálón keresztül költségek nélkül beszélhetünk ma már akár videóképpel is, és a többszereplős konferenciahívások szintén mindennaposak. Könnyedén ápolhatunk kapcsolatot fizikailag távol lévő barátainkkal, de akár egy sakkmeccs erejéig is összejöhetünk bárkivel a világhálón.

Az információáramlás felgyorsulása rendkívül sok kedvező hatással járhat. Az aktuális társadalmi kérdések, konkrét ügyek széles nyilvánosságot kaphatnak, így egyrészt a társadalmi értékrend formálódása is felgyorsul, másrészt a társadalom ítélete hamar megmutatkozik, és a döntéshozók is egyre gyorsabban kénytelenek ezt követni a szabályozásban. Egy másik igen fontos hatás lehet, hogy a tudományos kutatás rohamléptekben fejlődik. A kutatók könnyebben tudnak kommunikálni egymással, a fejlett technikák révén egyszerűbben fejthetnek meg problémákat, a tudás rendszerezése és átadása is hatékonyabbá válik, gyümölcse pedig elérhetővé mindenki számára. Ez akár

– a ma még hihetetlenül nagy – fejlettségi különbségek felszámolásában is fontos szerepet játszhat.

Összefoglalóan, egy világméretű szabályozó rendszer kialakításának mind társadalmi, mind technikai feltételei egyre inkább adottá válnak. Ez jelenti az alapját a felelős, tudatos társadalmi gondolkozás útján megteremtett, fenntartható jólétnek az egész emberiség számára.

9. A párosítás-piac dinamikája

Dolgozatom utolsó fejezetében azt a kérdést elemzem, hogy miként változik meg a stabil egyensúlyi helyzet, ha új szereplők lépnek be a párosítás-piacra. A kérdésfeltevés elég természetes, hiszen a piacok nagy része nem újul meg időnként, szereplői köre nem változik meg radikálisan, – mint az egyetemek hallgatósága az éves felvételi alatt – hanem folyamatosan működik és a piaci egyensúly változik dinamikusan. Előre is szeretném megjegyezni, hogy az elemzett modellek mind arra a feltételezésre épülnek, hogy a párkapcsolatok létrehozása és felbontása teljesen rugalmasan működik, mentes minden kötöttségtől. Ez természetesen nem minden gazdasági, társadalmi kapcsolatrendszerre igaz (egy munkaszerződés általában nem bontható fel rugalmasan bármelyik fél által, avagy egy házaspár elválásának is számos akadálya lehet).

A fejezet összes eredménye bizonyításokkal együtt megtalálható Biró, Cechlárová és Fleiner [9] munkájában.

9.1. Kétoldali párosítás-piac

Kétoldali párosítás-piac esetén a kérdést tárgyalhatjuk a munka-piac kontextusában. Mi történik ha egy új álláshely jön létre (vagy üresedik meg)? Amennyiben ez egy magasabb rangú, „szenior állás”, akkor a győztes jelentkező nagy valószínűséggel nem volt munkanélküli, tehát a felvétel után az ő volt álláshelye üresedik meg. Blum, Roth és Rothblum [11] ezért nevezte el a jelenséget az „álláslehetőségek láncolatának”.

A folyamatot modellező algoritmust viszont már jóval korábban, egy más kérdés kapcsán alkotta meg Roth és Vande Vate [60].

Roth-Vande Vate algoritmus

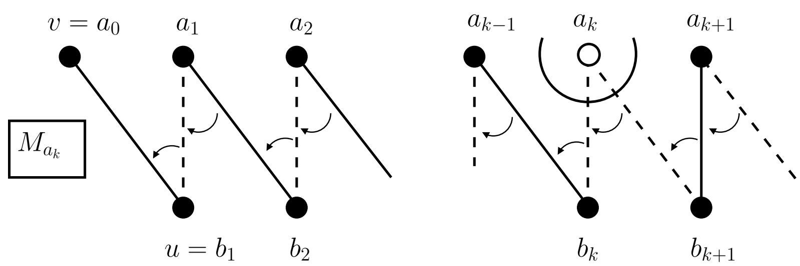
Tegyük fel, hogy egy új szereplő, v érkezik a piacra, ahol jelenleg egy M_v stabil párosítás áll fenn. Mi történik? Tegyük fel, hogy az új játékos egyenként ajánlatot tesz a piac szereplőinek a preferenciája szerint. Amennyiben senki sem fogadja el az ajánlatát, az azt jelenti, hogy a lehetséges partnerei mind egy-egy jobb partnerrel vannak kapcsolatban, vagyis az új szereplő senkivel sem alkot blokkoló párt, így az M_v párosítás stabil marad.

Amennyiben az új szereplő, v egy fiú, és ajánlatát egy u lány fogadja el először, akkor két eset lehetséges. Amennyiben u-nak nem volt párja az M_v párosításban, akkor az $M = M_v \cup \{u, v\}$ egy stabil párosítás lesz az új piacon. Ha viszont u egy w fiúval volt párban, akkor u és w kapcsolata felbomlik, u

és v összejön egymással, és most w-nek kell új párt keresnie magának úgy, mintha ő érkezett volna be a piacra. Vagyis $M_w = M \setminus \{u, w\} \cup \{u, v\}$ stabil párosítás lesz, a w fiú nélküli piacon. A mechanizmus folytatódik.

Ha mondjuk a_0-al jelöljük az első fiút, aki ajánlatot tesz, és b_1-el az első lányt, aki elfogadja, akkor egy $S = (A|B) = a_0, b_1, a_1, \ldots$ *ajánlattevő-visszautasító sorozatot* kapunk, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. $M_{a_k} = M_{a_{k-1}} \setminus \{a_k, b_k\} \cup \{a_{k-1}, b_k\}$ stabil párosítás az a_k nélküli piacon
2. a_{k-1} jobb partner b_k-nak, mint a_k (ezért fogadja el az ajánlatát)
3. b_{k+1} rosszabb partner a_k-nak, mint b_k (különben már korábban is blokkolnának)



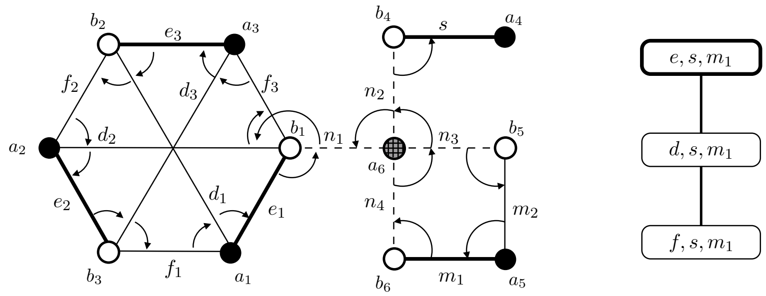
12. Ábra. Ajánlattevő-visszautasító sorozat a dinamikus mechanizmusban.

Észrevehetjük, hogy ha a fiúk tesznek ajánlatot, akkor a lányok helyzete egyre csak javul a folyamat során, míg a fiúk helyzete egyre rosszabbodik. Emiatt ugyanaz az ajánlattétel kétszer nem jöhet létre, a láncolat viszonylag gyorsan véget ér.

Példa A következő példában hat fiú és hat lány szerepel, a preferenciáik a következők a lehetséges kapcsolatokon:

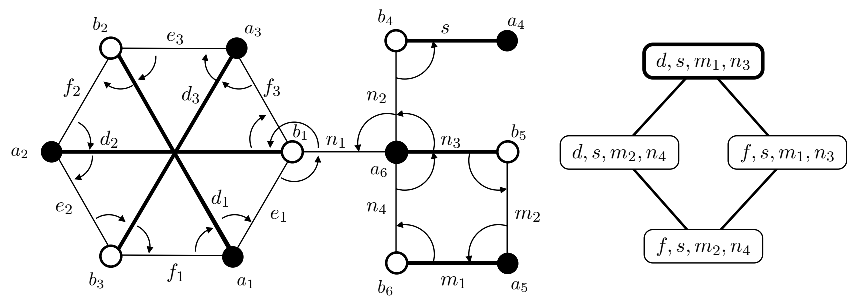
$$
\begin{array}{ll}
a_1 : e_1 > d_1 > f_1 & b_1 : f_3 > d_2 > n_1 > e_1 \\
a_2 : e_2 > d_2 > f_2 & b_2 : f_2 > d_1 > e_3 \\
a_3 : e_3 > d_3 > f_3 & b_3 : f_1 > d_3 > e_2 \\
a_4 : s > t & b_4 : s > n_2 \\
a_5 : m_1 > m_2 & b_5 : m_2 > n_3 \\
a_6 : n_1 > n_2 > n_3 > n_4 & b_6 : n_4 > m_1
\end{array}
$$

Legyen $d = d_1, d_2, d_3$, $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ és $f = \{f_1, f_2, f_3\}$. Tegyük fel, hogy kezdetben csak a_6 nincs a piacon, és az $\{e, f, m_1\}$ párkapcsolatok adnak egy kezdeti stabil párosítást.



13. Ábra. A kezdeti stabil párosítás, és a stabil párosítások hálója.

Lépjen be a_6, és nézzük meg, hogy mi történik! Négy új lehetséges kapcsolat jelenik meg, ezeknek a létrejöttére tesz az új szereplő ajánlatot sorban, a preferenciája szerint. Az első ajánlatot b_1 rögtön el is fogadja, így az n_1 kapcsolat létrejön, és e_1 felbomlik. Most a_1 marad egyedül, neki kell új partnert keresnie úgy, mintha most lépett volna be a piacra. A következő párkapcsolatok fognak megalakulni és felbomlani sorrendben: $d_1, e_3; d_3, e_2; d_2, n_1$. Végül a_6 ajánlatát b_5 fogadja el, aki egyedül volt. A kapott $\{d, s, m_1, n_3\}$ párkapcsolatok egy stabil párosítást jelentenek az új piacon.



14. Ábra. A végső stabil párosítás és a stabil párosítások új hálója.

Megjegyzem, hogy ha az $\{f, s, m_1, n_3\}$ partnerkapcsolatokból indultunk volna, akkor a folyamat egy lépésben véget ért volna, hiszen a_6 ajánlatát elsőként rögtön b_5 fogadta volna el.

Az új egyensúly tulajdonságai visszavezetéssel

Blum, Roth és Rothblum [11] megmutatták, hogy ez a folyamat lényegében megegyezik a leánykérő algoritmus azon változatával, amelyben az ajánlattételt a fiúk mindig egyenként teszik. (McVitie és Wilson [45] írta le először, hogy ez a változat ekvivalens az eredeti leánykérő algoritmussal.)

Most alkalmazzunk egy apró trükköt: a régi piacon lévő fiúk preferenciáját módosítsuk úgy, hogy ha párosítva vannak, akkor a párjuk kerüljön a preferencia-listájuk élére. Ekkor, ha az új piacon futtatjuk a leánykérő algoritmust és a régi piac párosított fiúi kezdik az ajánlattételt, rögtön elérjük a valódi kezdőállapotot. Innen ugyanúgy folytatódik az algoritmus, mintha nem változtattunk volna a fiúk preferenciáján. Vagyis – az eredeti preferenciák módosításával – el tudjuk érni, hogy az algoritmus mesterséges kezdőállapotában még senki se legyen kipárosítva, majd a leánykérő algoritmus elérje a valódi kezdőállapotot, és végül az eredetivel megegyező mechanizmus a valódi preferenciák szerinti megoldást adja. Az értelme mindennek az, hogy így a módosított preferenciákra nézve – Gale és Shapley 1.2 tétele szerint – fiú-optimális megoldást kapunk. Ennek következménye az alábbi tétel:

9.1 Tétel (Blum-Roth-Rothblum) *Tegyük fel, hogy egy kétoldali párosítás-piacon egy M_0 stabil párosítás áll fenn és néhány új fiú érkezik a piacra. Ekkor az ajánlattevő-visszautasító mechanizmussal kapott új, M stabil párosításban minden fiú vagy megmarad az M_0-beli párjával, vagy egy rosszabb párt kap, aki viszont a legjobb stabil pár számára az új piacon.*

Megjegyzem, hogy eszerint, minden lány vagy megmarad az eredeti párjával, ha az lehetséges, vagy egy jobb párt kap, aki viszont a legrosszabb stabil pár számára az új piacon.

Ennek a tételnek rengeteg következménye van. Egy piacon létrehozhatunk egy stabil párosítást oly módon, hogy a szereplőket egyenként engedjük oda belépni, majd a fenti ajánlattevő-visszautasító mechanizmussal kapjuk meg minden körben az új stabil párosítást. Ez egy elég természetes jelenség, sok piac valóban így épül fel. Kérdés, hogy mikor érdemes belépnie egy szereplőnek? A fenti tétel azt mondja ki, hogy aki az utolsó körben lép be, az mindenképpen a legjobb stabil párját kapja.

Tegyük fel, hogy egy u szereplő egy kétoldali párosítás-piacon egy M_v stabil párosításban jobb párt kap, mint egy M'_v stabil párosításban, majd v bejövetele után a mechanizmus révén létrejött új stabil párosításokat jelöljük M-mel és M'-vel. Ekkor triviális, hogy u nem kaphat jobb párt M'-ben, mint M-ben. Blum és Rothblum [10] ezzel a gondolatmenettel igazolta a következő tételt.

9.2 Tétel (Blum-Rothblum) *Egy kétoldali párosítás-piac stabil egyensúlya alakuljon ki úgy, hogy a szereplők egymás után lépnek be a piacra, majd az egyensúly az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus által jöjjön létre. Amennyiben két belépési sorrend csak annyiban különbözik, hogy* *két játékos helye a sorrendben felcserélődik: az elsőben u megy be előbb, a másodikban v, akkor u játékos az első sorrend alapján kialakult stabil párosításban nem kaphat jobb párt, mint a második sorrend alapján kialakult stabil párosításban.*

Azt mondhatjuk tehát, hogy egy párosítás-piacra érdemes minél később belépni, ha ott valóban érvényesül a partnerkapcsolatok rugalmas felbontásának és létrehozásának feltétele.

Tegyük most fel, hogy a párosítás-piacon a lány-optimális stabil párosítás áll fenn. Lépjen be néhány új fiú a piacra. Amennyiben egy l lány új párt kap, akkor bár egy jobb partnert kap, de egyben a legrosszabb stabil párját az új piacon. Ha l lány eredeti párja f fiú volt, akkor f-nek l a legrosszabb stabil partnere a régi piacon. Az új fiúk belépése után l elhagyja őt, és a helyzete tovább romlik, viszont az új piacon f is a legjobb stabil párt kapja. Ennek a megfigyelésnek a következménye az alábbi tétel.

9.3 Tétel (Roth-Sotomayor) *Tegyük fel, hogy egy kétoldali párosítás-piacon a lány-optimális stabil párosítás áll fenn, amikor belép néhány új fiú, és a lányok egy L halmaza új párt kap. Ebben az esetben minden L-beli lány határozottan jobb párt kap bármelyik stabil párosításban az új piacon, mint kapott akármelyik stabil párosításban a régi piacon; továbbá az L-beli lányok eredeti párjai határozottan rosszabb párt kapnak bármely stabil párosításban az új piacon, mint kaptak akármelyik stabil párosításban a régi piacon.*

Ha tehát a piac egyik oldala bővül, akkor a másik oldal néhány szereplője határozottan profitálhat ebből, a bővülő oldal néhány tagja pedig határozottan károsultja lehet a folyamatnak.

9.2. Egyoldali párosítás-piac

Egyoldali párosítás-piacon szintén megvizsgálhatjuk, hogy miként változik meg a piaci egyensúly, ha egy új szereplő lép be oda. A következőkben feltételezzük, hogy egy stabil fél-párosítás áll fenn a piacon (amely, ha nem tartalmaz páratlan ciklust, akkor egy stabil párosítás). Megmutatjuk, hogy egy új szereplő belépése után, egy teljesen hasonló mechanizmussal miként alakul ki az új egyensúly, vagyis egy új stabil fél-párosítás, és milyen tulajdonságokkal fog ez rendelkezni.

Ha egy egyoldali párosítás-piacon keresünk egy stabil fél-párosítást, akkor azt megtehetjük úgy, hogy a szereplőket egy adott sorrendben engedjük be a piacra, és a megoldás minden körben az itt ismertetett dinamikus mechanizmussal jön létre. Ezt az „inkrementáló” ötletet használta Tan és Hsueh [74] stabil fél-párosítás konstruálására. Algoritmusuk kétoldali piacokra megegyezik a Roth és Vande Vate algoritmussal.

Tan-Hsueh algoritmus

Legyen adva egy hM_v stabil fél-párosítás egy egyoldali párosítás-piacon, majd lépjen be egy új, v szereplő, és vizsgáljuk meg, milyen mechanizmusok játszódhatnak le. Tegyen az új szereplő ajánlatot minden lehetséges partnerének, sorban a preferenciája szerint. Egy lehetséges partner, ezt pontosan akkor fogja elfogadni, ha a párkapcsolat blokkolja az eredeti stabil fél-párosítást, vagyis egy párosított szereplő akkor fogadja el az ajánlatot, ha az ajánlattevő jobb, mint a párja, egy ciklus-beli szereplő elfogadja az ajánlatot, ha az ajánlattevőt jobban kedveli, mint a rosszabbik fél-párját a ciklusban, illetve egy párosítatlan szereplő mindenképpen elfogadja az ajánlatot.

Amennyiben senki sem fogadja el az új játékos ajánlatát, akkor hM_v stabil fél-párosítás marad az új piacon is. Ha valaki, mondjuk u fogadja el az ajánlatot elsőként, akkor a következő esetek lehetségesek aszerint, hogy u milyen helyzetben volt a régi piacon:

a) Ha u párosítatlan a régi piacon, akkor $hM = hM_v \cup \{v, u\}$ stabil fél-párosítás az új piacon.

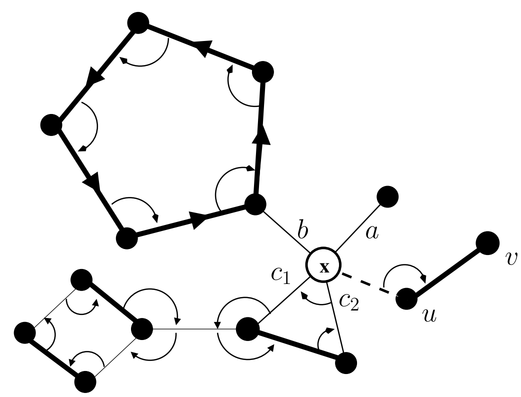
b) Ha u ciklus-beli a hM_v stabil fél-párosításban, vagyis $u = c_0$ egy $C = (c_0, c_1, \dots, c_{2k-1}, c_{2k})$ ciklusra, akkor $hM = hM_v \setminus C \cup \{v, u\} \cup \{c_1, c_2\} \cup, \dots, \cup \{c_{2k-1}, c_{2k}\}$ stabil fél-párosítás lesz az új piacon. (Tehát a páratlan ciklusból kilép az u szereplő, és a többiek stabil párokba rendeződnek.)

c) Ha u párosított a hM_v stabil fél-párosításban, mégpedig x szereplővel alkot párt, akkor $hM_x = hM_v \setminus \{u, x\} \cup \{v, u\}$ stabil fél-párosítás lesz az x szereplő nélküli piacon. (Vagyis x szereplő folytatja az ajánlattételt, mintha ő lépett volna be újonnan a piacra.)

A mechanizmus a) és b) esetben rögtön megáll egy új stabil egyensúlyi helyzetben. Ha viszont a c) eset ismétlődik folyton, akkor – a kétoldali piacokkal ellentétben itt – előfordulhat, hogy a mechanizmus sohasem áll meg. Tan és Hsueh legfontosabb megállapítása, hogy ebben az esetben az ismétlődő szereplők elkülöníthetők egy új ciklusba.

9.4 Tétel (Tan-Hsueh) *Ha* $S = (A|B) = a_0, b_1, a_1, \ldots$ *egy ajánlattevő-visszautasító sorozat, és* $a_i = b_k$ *az első visszatérés benne, akkor ez a sorozat folytatódni fog oly módon, hogy* a_k *vissza fog térni egy* b_{k+m+1}*-nél, és a következő tulajdonságok lesznek igazak:* $\{a_k, b_{k+1}, \ldots, b_{k+m}, a_{k+m}\}$ *különböző szereplők, és ugyanilyen sorrendben egy új,* C *ciklust alkotnak, vagyis* $hM = hM_{a_k} \setminus \{a_{k+1}, b_{k+1}\} \setminus \cdots \setminus \{a_{k+m}, b_{k+m}\} \cup C$ *egy stabil fél-párosítás az új piacon.*

Lássunk erre a mechanizmusra egy példát!



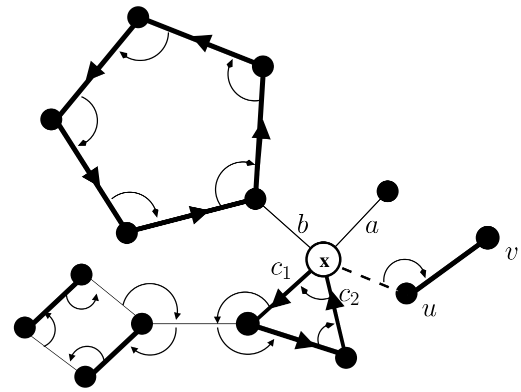
15. Ábra. A Tan-Hsueh algoritmus egy példán.

Itt v érkezik be a piacra, és u fogadja el elsőként az ajánlatát. Mivel u az x szereplővel volt párban, ezért őt elhagyja, így ezután az x szereplő tesz ajánlatokat. Ha senki sem fogadja el, akkor a stabil fél-párosítás az is marad, és x párosítatlan lesz. Amennyiben valaki elfogadja x ajánlatát, akkor a következő kimenetelek valósulhatnak meg a mechanizmus végén:

a) Egy párosítatlan szereplő fogadja el az ajánlatot, egy új stabil párt alkotnak.

b) Egy ciklus-beli szereplő fogadja el az ajánlatot, egy új stabil párt alkotnak, a ciklus maradék része pedig szintén stabil párokra bomlik.

c) Mindig egy párosított pont fogadja el az aktuális ajánlatot, végül egy olyan pont kap egyszer ajánlatot, aki korábban ajánlatot tett (ez pont az x szereplő lesz), majd a következő visszatérésig érintett szereplők egy új ciklust alkotnak.



16. Ábra. Az eredményül kapott stabil fél-párosítás.

Az új egyensúly tulajdonságai direkt bizonyítással

A kétoldali piachoz igen hasonló állításokat fogunk a következőkben igazolni. A közvetlen érvelésben egy új, egyszerű „kulcs-lemmát" használunk.

9.5 Lemma (Kulcs-lemma) *Tegyük fel, hogy egy új szereplő, v lép be az egyoldali párosítás-piacra, ahol egy hM_v stabil fél-párosítás áll fenn. Amennyiben v nem alkot blokkoló párt egy u szereplővel hM_v-re nézve, akkor v nem alkothat stabil párt u-val az új piacon.*

A lemma bizonyítása megtalálható a [8] és [9] munkákban. Sok fontos következtetés adódik belőle. Gondoljuk meg, hogy miként alakulnak ki az új párok. Tegyük fel, hogy egy j játékos új párt kap a dinamikus mechanizmus során, mégpedig úgy, hogy ő teszi az ajánlatot. Abban a pillanatban, amikor ezt az ajánlatot elfogadja a párja, a többi ennél jobb lehetséges jelöltje visszautasította j ajánlatát, vagyis nem alkotott blokkoló párt vele, éppen ezért a lemma állítása miatt stabil párt sem alkothat j-vel, vagyis j szükségképpen a legjobb stabil párját kapta meg.

9.6 Tétel (Biró-Cechlárová-Fleiner) *Minden szereplő, aki a dinamikus mechanizmusban ajánlattétellel kap új párt, az a legjobb stabil párt kapja az új piacon. (Ugyanígy mindenki, aki egy ajánlat elfogadásával új párt kap, a legrosszabb stabil párt kapja az új piacon.)*

Nem szabad azonban elfelejtenünk, hogy aki ajánlatot tesz, annak egyre romlik a helyzete az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus alatt, illetve aki ajánlatot fogad el, az pont azért teszi, mert mindig javul a helyzete. Ezzel általánosíthatjuk Blum, Roth és Rothblum 9.1 tételét az egyoldali párosítás-piacok esetére.

9.7 Tétel (Biró-Cechlárová-Fleiner) *Tegyük fel, hogy egy új szereplő érkezik az egyoldali párosítás-piacra és egy hM_v egyensúlyi helyzetből egy hM új egyensúlyi helyzet keletkezik az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus révén. Amennyiben egy u szereplő mindkét piacon párosított, akkor pontosan akkor marad meg u az eredeti párjával, ha ez lehetséges. Ha új partnere lesz, akkor vagy egy rosszabb párt kap, de a legjobb stabil párt az új piacon, vagy egy jobb párt kap, de a legrosszabb stabil párt az új piacon.*

Ezt az állítást úgy is értelmezhetjük, hogy minden szereplőnek csak annyira javul vagy romlik a helyzete, amennyire muszáj.

Mint már említettem, ha megadjuk a szereplők piacralépésének sorrendjét, és feltételezzük, hogy minden körben a piaci egyensúly a fenti dinamizmus révén áll helyre, akkor a belépési sorrend függvényében egyértelműen kapunk egy stabil egyensúlyi helyzetet a piacon. Blum és Rothblum 9.2 állítása teljesen hasonló gondolatmenettel igazolható a Tan-Hsueh algoritmusra is.

9.8 Tétel (Biró-Cechlárová-Fleiner) *Egy egyoldali párosítás-piac stabil egyensúlya alakuljon ki úgy, hogy a szereplők egymás után lépjenek be a piacra, majd az egyensúly az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus által jöjjön létre. Amennyiben két belépési sorrend csak annyiban különbözik, hogy két játékos helye a sorrendben felcserélődik: az elsőben u megy be előbb, a másodikban v, akkor u játékos az első sorrend alapján kialakult stabil fél-párosításban nem kaphat jobb párt, mint a második sorrend alapján kialakult stabil fél-párosításban.*

Ha fennállnak a piac rugalmassági feltételei, akkor a piac szereplőinek előnyük származhat abból, ha minél később érkeznek a piacra. Sőt, amennyiben nem csak egy egyensúlyi helyzete van a piacnak, akkor mindig található olyan szereplő, akinek megéri kilépni a piacról, mert visszatérve egy határozottan jobb párt kaphat.

Befejezésként Roth és Sotomayor 9.3 tételét általánosítjuk. Ehhez fel fogjuk használni Pittel és Irving egy fontos definíciójának és tételének általánosítását. Az utóbbi két szerző [48] munkájában azt a szituációt vizsgálta, hogy miként jöhet létre oly módon egy stabil párosítás egy egyoldali párosítás-piacon, hogy az utolsó, v szereplő belépésével tűnik el pont az utolsó ciklus a stabil megoldásból. Ennek kapcsán v-hez tartozó *mag-konfigurációnak* neveztek egy olyan stabil fél-párosítást, amelyre v belépését követően az ajánlattevő-visszautasító sorozat a lehető legrövidebb.

9.9 Tétel (Pittel-Irving) *Ha hM_v egy v-hez tartozó mag-konfiguráció, akkor a hozzá tartozó ajánlattevő-visszautasító sorozat: $v = a_0, b_1, a_1, \ldots, a_{k-1}, b_k$ pontosan $2k$ különböző szereplőből áll, egyértelműen definiált, és minden $i = 1 \ldots k-1$ indexre:*

1. *b_i a legrosszabb stabil párja a_i-nek a régi piacon;*
2. *a_i a legjobb stabil párja b_i-nek a régi piacon.*

Általánosítsuk a mag-konfiguráció definícióját a következő természetes módon. Egy tetszőleges egyoldali párosítás-piacon nevezzünk egy hM_v stabil fél-partíciót a v szereplőhöz tartozó *mag-konfigurációnak*, ha v belépése esetén az ajánlattevő-visszautasító algoritmus a lehető legrövidebb. (Abban az esetben, ha az algoritmus ciklizál, akkor a sorozat hosszát az első visszatérésig értjük.) Ekkor a következő formában lehet általánosítani a fenti tételt.

9.10 Tétel (Biró-Cechlárová-Fleiner) *Ha hM_v egy v-hez tartozó mag-konfiguráció, akkor a hozzá tartozó ajánlattevő-visszautasító sorozat: $v = a_0, b_1, a_1, \ldots, a_{k-1}, b_k(, a_k)$ pontosan $2k$ (vagy $2k+1$) különböző szereplőből áll, egyértelműen definiált, és minden párosított szereplőre a sorozatban teljesül, hogy:*

1. *b_i a legrosszabb stabil párja a_i-nek a régi piacon és b_{i+1} a legjobb stabil párja a_i-nek az új piacon;*
2. *a_i a legjobb stabil párja b_i-nek a régi piacon és a_{i-1} a legrosszabb stabil párja b_i-nek az új piacon.*

A bizonyítás konstruktív, tehát minden esetben meg is lehet találni egy mag-konfigurációt. (Ez szintén megtalálható a [9] munkában.)

A fenti tétel egyszerű következménye Roth és Sotomayor 9.3 tételének következő általánosítása.

9.11 Tétel (Biró-Cechlárová-Fleiner) *Tegyük fel, hogy egy egyoldali párosítás-piacon egy új szereplő lép be a piacra, és az egyensúly az ajánlattevő-visszautasító mechanizmus útján áll helyre. Ekkor léteznek olyan szereplők, akik határozottan jobb párt kapnak bármelyik stabil fél-párosításban az új piacon, mint akármelyik stabil fél-párosításban a régi piacon; továbbá olyan szereplők is, akik határozottan rosszabb párt kapnak bármelyik stabil fél-párosításban az új piacon, mint akármelyik stabil fél-párosításban a régi piacon.*

Összefoglalás-Következtetések

Véleményem szerint, a közgazdász feladata, hogy megvizsgálja és megértse a társadalmi és gazdasági problémák mibenlétét. Az elemzéshez modelleket használ, amik szerencsés esetben jól közelítik a valóságot. Ha a paradigmák nem túl leegyszerűsítők, az alkalmazott eszköztár helyes, a leírás pontos és közérthető, akkor mások számára is világossá válhat a kérdés. Ideális esetben azonban a gondolkodó közgazdász javaslatot is tehet a problémák megoldására. Ha érvelése helyes és közérthető, akkor talán a szakmai közvélemény is elfogadja ezt, és végső soron akár meg is valósulhat a megoldás. Úgy gondolom, hogy ez az, ami minden kutatót a legjobban motivál, ha választ tud adni a társadalmi kérdésekre, és az ez alapján kivitelezett megoldás mindenki javát szolgálja.

Dolgozatom a stabil párosítás modellcsalád leírására épül. Az eszköztár részletes bemutatása után igyekeztem összefoglalni azon társadalmi és gazdasági problémák körét, amelyek vizsgálatához ez a fogalmi keret jól használható. Az ismertetett témakörök, reményeim szerint, másokat is inspirálhatnak hasonló elemzések elvégzésére.

A legjobb érvet, a modellek alkalmazhatóságára a valóságban már megvalósult és sikeresen működő példák adják. A párosító-programok gyors ütemű terjedése és széleskörű, valóban sokakat érintő használata, úgy vélem, mindenkit meggyőzhet arról, hogy érdemes a kérdéskörrel komolyan foglalkozni, és keresni a továbbfejlesztések minden lehetséges módját.

Végül kiemeltem egy-egy olyan konkrét alkalmazást – elsősorban az egységes európai felsőoktatási felvételi rendszert és egy speciális élődonoros vesecsere-programot – melyek megvalósítását a közeljövőben fontosnak és elérhetőnek gondolom.

Köszönetnyilvánítás

Vannak olyan együttműködések, amelyekben az egyik fél határozottan kedvezményezett, de nincs lehetősége transzfert adni. Ilyen esetekben fordul elő, hogy a kapcsolatból egyoldalúan profitáló fél egyszerűen „köszönetet mond”. Ezzel a jelzéssel tudja kifejezni háláját, nagyrabecsülését az önzetlenül segítő fél irányában.

A dolgozat megírásában nyújtott segítségéért szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, dr. Magas Istvánnak, akitől főként a közgazdasági kérdésekben kaptam hasznos iránymutatásokat. Külső konzulensemnek, Solymosi Tamásnak, aki a matematikai modellek leírásában adott sok jótanácsot. Végül, de nem utolsósorban, Fleiner Tamásnak. Nála kezdtem el foglalkozni pontosan öt éve a stabil párosítások témakörével, és azóta mind a matematikus diplomamunkámban, mind a doktori kutatásaimban témavezetőként folyamatosan segített, mellettem állt.

Matematikai összefoglaló

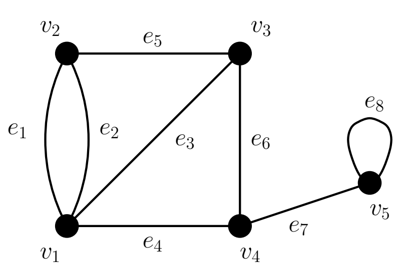
Gráfok és hipergráfok elmélete[46]

Gráfok

Egy *gráf* egy rendezett pár, $G = (V, E)$, ahol V egy nem-üres halmaz, E pedig ebből a halmazból képezhető párok egy halmaza. V elemeit *csúcsoknak* vagy *pontoknak*, E elemeit *éleknek* nevezzük. Egy adott gráfra a csúcsok számát n-el az élek számát m-vel jelöljük.

Ha az $e \in E$ él a $\{v_1, v_2\}$ párnak felel meg, akkor ez a két pont e végpontja. Ha $v_1 = v_2$, akkor e *hurokél*. Ha két különböző nem hurokélnek a végpontjai azonosak, a két élet *párhuzamos* élnek nevezzük. Azokat a gráfokat, amelyekben nincsenek hurokélek és párhuzamos élek, *egyszerű gráfnak* nevezzük. Ha $\{v_1, v_2\} \in E$, akkor v_1 és v_2 *szomszédos csúcsok*. Az élek *illeszkednek* a végpontjaikra. Két *él* akkor *szomszédos*, ha van közös végpontjuk.

A gráf megadásának legegyszerűbb módja egy lerajzolás, ahol a csúcsokat pontokkal, az éleket pedig pontokat összekötő vonalakkal ábrázoljuk. Másik fontos reprezentáció az *illeszkedési mátrix*, egy olyan $n \times m$-es $B(G)$ mátrix, ahol az i-edik sor j-edik eleme $B_{i,j} = 0$, ha a j-edik él nem illeszkedik az i-edik csúcshoz, illetve $B_{i,j} = 1$, ha illeszkedik. Lássunk példát egy gráf megadására:



$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Egy $(v_o, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ sorozatot, ahol a csúcsok mind különbözőek, *útnak* hívunk. Ha $v_0 = v_k$, akkor ez egy *kör* a gráfban. Egy út vagy kör hosszán az őt alkotó élek számát értjük. Egy G gráfot *páros gráfnak* nevezünk, ha G csúcsainak $V(G)$ halmaza két részre, egy L és egy F halmazra osztható úgy, hogy G minden élének egyik végpontja L-ben, másik végpontja F-ben van.

Tétel *Egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nincs benne páratlan hosszú kör.*

---

[46] Ebben a részben a Katona-Recski-Szabó [38] és a Lovász-Plummer [44] könyveket használom alapforrásként.

Párosításnak nevezünk egy M élhalmazt, ha semelyik két élnek nincs közös pontja. Egy G gráfban található maximális párosítás méretét jelöljük $\nu(G)$-vel. $X \subseteq V(G)$ egy *lefogó ponthalmaz*, ha G minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza. A lefogó pontok minimális számát $\tau(G)$-vel jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy ha M egy maximális méretű párosítás, akkor csak M éleinek lefogására legalább $|M| = \nu(G)$ pontra van szükségünk, ezért

$$\nu(G) \leq \tau(G)$$

minden gráfra teljesül. Kőnig Dénes [42] bizonyította, hogy páros gráfokra egyenlőség áll fenn a két paraméter között.

Tétel (Kőnig) *Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.*

Legyen adva a G gráf minden e éléhez egy $w(e)$ súly. Egy párosítás *összsúlyán* a párosításban szereplő élek súlyainak összegét értjük. A maximális összsúlyú párosítás összsúlyát jelöljük $\nu_w(G)$-vel. Egy $c : V \implies R$ értékadást a csúcsokon nevezzünk *fedésnek*, ha minden $e = \{u, v\}$ élre $c(u) + c(v) \geq w(e)$ teljesül. Egy fedés értéke a csúcsok értékeinek összege. A minimális értékű fedés értékét jelöljük $\tau_w^*(G)$-vel.

Nyilvánvaló, hogy ha M egy maximális összsúlyú párosítás, akkor csak M éleinek fedésére kell egy ekkora értékű fedés, ezért $\nu_w(G) \leq \tau_w^*(G)$ minden G gráfra teljesül. Egerváry Jenő [20] – Kőnig tételének általánosításaként, ugyanabban az évben, 1931-ben – belátta, hogy a két paraméter között egyenlőség áll fenn, ha a gráf páros.

Tétel (Egerváry) *Ha G páros gráf, akkor $\nu_w(G) = \tau_w^*(G)$*

Ha az adott gráf nem páros, akkor természetesen $\nu(G)$ és $\tau(G)$ között szigorú egyenlőtlenség is fennállhat (elég csak egy három hosszú körre gondolnunk, ahol 1 és 2 ez a két érték). Edmonds és Gallai 1965-ben mutatott először olyan módszert, amellyel tetszőleges G gráf esetén meghatározható $\nu(G)$ értéke. Majd ugyanebben az évben $\nu_w(G)$ kiszámítására is adott Edmonds egy polinom idejű algoritmust teszőleges G gráf és w súlyozás esetén.

Hipergráfok

Egy *hipergráf* egy rendezett pár, $H = (V, E)$, ahol V egy nemüres halmaz, E pedig V részhalmazainak egy halmaza. V elemeit itt is csúcsoknak vagy pontoknak, E elemeit pedig *hiperéleknek* nevezzük. (A gráfok tehát olyan speciális hipergráfok, ahol minden él legfeljebb két pontra illeszkedik.)

A hipergráfok reprezentálására legegyszerűbb ismét a $B(H)$ illeszkedési mátrixot venni, melyben $B_{i,j} = 1$ akkor és csak akkor, ha az i-edik csúcsra illeszkedik a j-edik él (és $B_{i,j} = 0$, ha nem).

Egy M hiperélhalmazt szintén párosításnak nevezünk, ha semelyik két élnek nincs közös pontja. A maximális méretű párosítás méretét egy H hipergráfban hasonlóképpen $\nu(H)$-vel jelöljük. $X \subseteq V(H)$ szintén lefogó ponthalmaz, ha H minden hiperélének legalább az egyik pontját tartalmazza. A lefogó pontok minimális számát itt is $\tau(H)$-val jelöljük. A $\nu(H) \leq \tau(H)$ egyenlőtlenség teljesen hasonló okok miatt áll fenn minden H hipergráfra, mint gráfok esetén.

Egy H hipergráf éleihez is rendelhetünk $w : E(H) \Longrightarrow \mathbb{R}$ súlyokat. Egy párosítás összsúlyán a párosításban résztvevő hiperélek súlyainak összegét értjük. A H hipergráfban párosítással elérhető maximális összsúly $\nu_w(H)$-val jelöljük. Itt is fedésnek nevezünk egy olyan $c : V(H) \Longrightarrow \mathbb{R}$ értékadást, ha minden e hiperélre $\sum_{v \in e} c(e) \geq w(e)$ teljesül. Egy fedés értéke hasonlóképpen a csúcsokon vett értékek összege, a minimális értékű fedést pedig itt is $\tau_w^*(H)$-val jelöljük. A $\nu_w(H) \leq \tau_w^*(H)$ egyenlőtlenség hasonló okokból kifolyólag minden H hipergráfra fennáll.

Egy maximális méretű párosítás megtalálása, vagyis $\nu(H)$ megadása egy tetszőleges hipergráfra már elméletileg nehéz feladat. Ezért $\nu_w(H)$ kiszámítására sem remélhető polinom idejű algoritmus.

Lineáris programozás[47]

Legyen A egy $m \times n$-es mátrix, c egy n dimenziós sorvektor, b egy m-dimenziós oszlopvektor adott paraméterekkel. Továbbá x egy n-dimenziós oszlopvektor változó paraméterekkel. Ekkor a lineáris programozás alapfeladata felírható a

$$max\{cx : Ax \leq b\}$$

alakban. Amennyiben az x változóira megköveteljük a nemnegativitást, és ugyanezt a feltevést tesszük az y — egy m-dimenziós sorvektor — koordinátáiban szereplő *duális változókra*, akkor igaz a következő tétel:

Tétel (a lineáris programozás dualitástétele) *Ha a $max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\}$ (primál) program megoldható és felülről korlátos, akkor a $min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$ (duális) program is megoldható és alulról korlátos, a primál programnak létezik maximuma, a duális programnak létezik minimuma, valamint*

$$max\{cx : Ax \leq b, x \geq 0\} = min\{yb : yA \geq c, y \geq 0\}$$

[47] Ebben a részben Jordán-Recski-Szeszlér [35] könyvéből idézek

Egészértékű programozási feladatról beszélünk akkor, ha a változóktól megköveteljük, hogy csak egész értéket vehetnek fel. Ekkor, ha a primál feladatot LP-vel, duálisát DLP-vel, egészértékű változatait pedig IP-vel és DIP-vel jelöljük, akkor az egészértékűségi megszorítás miatt a következő összefüggés érvényesül a feladatok optimumaira:

$$\max_{IP} \leq \max_{LP} = \min_{DLP} \leq \min_{DIP}$$

Néhány esetben érdemes külön figyelembe venni azt az esetet is, amikor a változók fél-egész értéket is felvehetnek. Ezeket a *fél-egészértékű programozási feladatokat* értelemszerűen hIP-vel illetve $DhIP$-vel jelöljük. Az optimumok közötti összefüggés így tovább finomítható:

$$\max_{IP} \leq \max_{hIP} \leq \max_{LP} = \min_{DLP} \leq \min_{DhIP} \leq \min_{DIP}$$

A lineáris programozási feladat elméletileg jól kezelhető, vagyis az optimum – az input hosszának függvényében – polinom időben kiszámítható. Az egészértékű optimumok meghatározása viszont elméletileg nehéz, hiszen igen sok ismert elméletileg nehéz probléma egyszerűen átfogalmazható egészértékű programozási feladatra. Ha viszont egy speciális problémacsaládra az IP és az LP feladatok optimumai mindig megegyeznek, akkor ezek ki is számíthatók polinom időben.

Egy mátrixot *totálisan unimodulárisnak* nevezünk, ha minden négyzetes részmátrixának a determinánsa $0, -1$ vagy 1. Belátható például, hogy egy tetszőleges páros gráf illeszkedési mátrixa mindig totálisan unimoduláris.

Tétel *Legyen A totálisan unimoduláris mátrix, b egész vektor, c tetszőleges (valós koordinátájú) vektor. Tegyük fel, hogy a $\max\{cx : Ax \leq b\}$ (LP) feladat megoldható és a maximuma véges. Ekkor a $\max\{cx : Ax \leq b, x \text{ egész}\}$ (IP) feladat is megoldható és a maximuma megegyezik az (LP) feladat maximumával.*

Alkalmazás a maximális összsúlyú párosítás esetére

Ha B egy G páros gráf illeszkedési mátrixa, és x egy párosítás karakterisztikus függvénye az éleken, akkor a maximális összsúlyú párosítás feladat felírható egy egészértékű programozási (IP) feladatként:

$$\nu_w(G) = \max\{wx : Bx \leq \underline{1}, x \text{ egész}\}$$

ennek a duálisa (DLP) pontosan a gráf minimális értékű fedését adja:

$$\tau^*_w(G) = \min\{\underline{1}c : cB \geq w\}$$

Mivel igazolható, hogy a B mátrix totálisan unimoduláris, ezért a fenti tétel miatt a két optimum megegyezik, vagyis teljesül Egerváry tétele.

Ha G nem páros akkor azt fogjuk belátni, hogy a maximális összsúlyú fél-párosítás értéke megegyezik a minimális értékű fedés értékével, (vagyis a hIP feladat maximuma megegyezik a DLP feladat minimumával). Formálisan:

$$\max\{wx : Bx \leq \underline{1}, x \text{ fél-egész}\} = \min\{\underline{1}c : cB \geq w\}$$

Ennek igazolásához definiáljuk a G^d gráfot a következőképpen: $V(G^d)$-t a G pontjainak megduplázásával kapjuk meg, tehát minden $v_i \in V(G)$ csúcshoz rendeljünk két pontot, v_i', $v_i'' \in V(G^d)$ továbbá, a gráf éleire $e = \{v_i, v_j\} \in E(G) \iff e' = \{v_i', v_j''\}$ és $e'' = \{v_i'', v_j'\} \in E(G^d)$ teljesül. Legyen w^d súlyfüggvény G^d-n, olyan hogy $w^d(e') = w^d(e'') = \frac{1}{2}w(e)$.

Belátható, hogy ha x^d egy maximális összsúlyú párosítás G^d-n és c^d egy minimális értékű fedés, akkor $x(e) := \frac{x^d(e')+x^d(e'')}{2}$ megadással egy maximális összsúlyú fél-párosítást, míg $c(v) := c^d(v')+c^d(v'')$ értékadással egy minimális értékű fedést kapunk G-re.

Kooperatív játékelmélet[48]

Átváltható hasznosság nélküli játékok

Egy *átváltható hasznosság nélküli játék*, röviden *NTU-játék*, megadható egy (N, V) párral, ahol $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ a játékosok halmaza és V a kifizetés-függvény, amely minden $S \subseteq N$ társuláshoz hozzárendel egy $V(S)$, $\mathbb{R}^S$-beli halmazt, úgy hogy $V(\emptyset) = \emptyset$ és minden $S \subseteq N, S \neq \emptyset$-re:

a) $V(S)$ egy nemüres és zárt halmaza $\mathbb{R}^S$-nek

b) ha $x \in V(S)$ és $y \leq x$, akkor $y \in V(S)$

c) $V(S) \cap \mathbb{R}^S_+$ korlátos.

Minden játékos részt vesz a játékban, ezért a játék kimenete egy $V(N)$-beli vektor, melynek koordinátái az egyes játékosok elért hasznosságát jelentik. Természetesen két kimenet közül minden játékos azt preferálja, amelyikben a hasznossága nagyobb. A

[48]Elsősorban Forgó, Szép és Szidarovszky [24] könyve valamint Solymosi [71] jegyzete alapján készült a következő leírás.

játék egy $x \in V(N)$ kimenete benne van a játék *magjában*, ha nem létezik olyan (blokkoló) S társulás és a tagjai által elérhető $y \in V(S)$ kimenet, melyre $y_i > x_i$ minden $i \in S$-re. Tehát a játékosok egyik csoportjának sem éri meg kilépni a nagykoalícióból, mert önmagukban nem tudnának olyan kimenetet elérni, amelyben minden szereplőjük nagyobb haszonra tehet szert.

Természetes feltételként jelentkezhet a *szuperadditivitás*, amely egy NTU-játékra megköveteli, hogy tetszőleges két $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$ társulásra $V(S) \cup V(T) \subseteq V(S \cup T)$ teljesüljön.

Partícionálási játék

További specializálás után definiálhatjuk a *partícionálási játékot*. Itt feltesszük, hogy adva van a lehetséges *alaptársulásoknak* egy $\mathcal{B} \subseteq 2^N$ halmaza, melynek része minden $\{i\}$, $i \in N$ egyszereplős társulás (mindenkinek meghagyjuk a jogot, hogy egyedül maradjon). Egy tetszőleges S társulás által legyen elérhető egy $x \in \mathbb{R}^S$ kifizetés, akkor és csak akkor ha létezik az S halmaznak egy olyan $B_i \in \mathcal{B}$ alaptársulásokból álló $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k = S$ partíciója, hogy minden ebben résztvevő B_i társulásra az x kimenetből B_i szereplőinek jutó kifizetés $V(B_i)$-ben legyen. Ha $S \subseteq N$-re $\Pi_{\mathcal{B}}(S)$-el jelöljük a $\mathcal{B}$ alaptársulásokból előállítható partíciók halmazát az S szereplőin, akkor tömörebb kifejezéssel:

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \exists \pi \in \Pi_{\mathcal{B}}, B_i \in \pi, x \in V(B_1) \times V(B_2) \times \cdots \times V(B_k)\}$$

A partícionálási játék nagy előnye, hogy egy kimenet mag-beli voltának vizsgálatakor elég csak az alaptársulásokra ellenőrizni a stabilitási feltételt. Vagyis igaz a következő tétel:

Tétel *Egy partícionálási játékban x kimenet mag-beli akkor és csakis akkor, ha nem létezik blokkoló B alaptársulás (vagyis egy $B \in \mathcal{B}$ és egy $y \in V(B)$, hogy $y_i > x_i$ minden $i \in B$-re).*

A bizonyításhoz azt kell csak megmutatni, hogy ha az adott x kimenetre van egy tetszőleges S blokkoló társulás, akkor van egy B blokkoló alaptársulás is. Ez viszont nyilvánvaló, hiszen az S társulás által elért $y \in V(S)$ egy alapkoalíciókból álló partícióval valósítható meg, tehát az ebben szereplő bármelyik B alaptársulás is blokkoló lesz.

Az alaptársulások által elérhető kifizetésekre tett erős megkötéssel kaphatjuk meg a partícionálási játékok speciális eseteként a *társulási játékot*. Feltesszük, hogy minden

$B \in \mathcal{B}$ társulásra létezik egy $\underline{v}(B) \in \mathbb{R}^B$ kifizetés, hogy a B által elérhető más kifizetésekben egyik B-beli játékos sem kaphat többet. Vagyis

$$V(B) = \{x \in \mathbb{R}^B : x \leq \underline{v}(B)\}$$

A társulási játékokban tehát nem kérdés, hogy egy társulás, ha megalakul, akkor mekkora kifizetést kapnak belőle a tagok. (Ezt értelmezhetjük úgy is, hogy csak egy lehetséges formája van minden koalíciós együttműködésnek.) Így a játék kimenetén elég már csak azt értenünk, hogy mely alaptársulások jöttek létre, a tényleges kifizetések ebből egyértelműen meghatározódnak. A társulási játék kimenetelét ezért hívhatjuk egyszerűen partíciónak.

Ebből kifolyólag viszont az egyes szereplők természetes módon tudnak egy rangsort felállítani az alaptársulások között, amelyben tagok lehetnek: mindenki azt a társulást preferálja, ahol a társulás megvalósulása esetén nagyobb lesz a kifizetése. Formálisan: ha $i \in B_k$ és $i \in B_l$, akkor $B_k \leq_i B_l \iff \underline{v}_i(B_k) \leq \underline{v}_i(B_l)$.

A társulási játék kimenete, egy π partíció pontosan akkor lesz benne a játék magjában, ha nincs blokkoló alaptársulás, vagyis egy olyan létre nem jött társulás, melynek tagjai egyértelműen jobban járnának a társulás megvalósulásával, mint a jelenlegi partícióban. Precízebben fogalmazva, jelöljük $B_\pi[i]$-vel azt a társulást, amelynek az i játékos tagja a π partícióban. Definíció szerint akkor és csakis akkor blokkolja egy $B \in \mathcal{B}$ társulás a kimenetet, ha minden $i \in B$-re $\underline{v}_i(B_\pi[i]) < \underline{v}_i(B)$, ami a fentiek szerint ekvivalens azzal, hogy $B_\pi[i] <_i B$.

Egy társulási játékban mag-beli kimenetet keresni, tehát – abban az esetben, ha a preferenciák szigorúak (tehát senki sem kap pont ugyanannyi kifizetést két alaptársulásban) – ekvivalens a stabil társulás problémával. Ezért a társulási játék egy mag-beli kimenetét másképpen *stabil partíciónak* is nevezhetjük.

A *szobatárs-keresési játék* olyan társulási játék, ahol az alaptársulások legfeljebb kétszemélyesek lehetnek. Itt egy mag-beli kimenet kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy stabil párosításnak a kapcsolódó stabil szobatárs problémában.

A *házasítási játék* olyan szobatárs-keresési játék, ahol a játékosok halmaza két részre osztható és kétszemélyes alaptársulást csak két különböző részben lévő játékos alkothat. Itt egy mag-beli kimenet kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy stabil párosításnak a kapcsolódó stabil házasság problémában.

Átváltható hasznosságú játékok

Egy játék *átváltható hasznosságú*, röviden *TU-játék*, ha megadható egy (N, v) párral, ahol v most egy *összhasznosság-függvény*, amely minden $S \subseteq N$ társuláshoz egy $v(S) \in \mathbb{R}$ értéket rendel hozzá, amely a társulás által elérhető összkifizetést jelenti. Ezen osztozhatnak a társulás tagjai. Meggondolható, hogy minden TU-játék felírható NTU-játékként is a következő hozzárendeléssel: $V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)\}$ minden $S \subseteq N, S \neq \emptyset$-re.

Átváltható hasznosságú játékoknál, ha az $x(S) = \sum_{i \in S} x(i)$ jelölést használjuk, akkor a játék kimenete egy $x(N) = v(N)$ *szétosztás*. Ha minden i szereplőre teljesül a $x_i \geq v(\{i\})$ feltétel (vagyis senki sem kap kevesebb kifizetést, mint amit egyedül is el tud érni), akkor a kimenetet *elosztásnak* nevezzük. Egy elosztás benne van a játék magjában, ha $x(S) \geq v(S)$ minden S társulásra. A szuperadditivitási feltétel TU-játékokra a $v(S) + v(T) \leq v(S \cup T)$ egyenlőtlenségnek felel meg.

A mag-megoldás létezésének szükséges és elégséges feltételét pontosan meg lehet határozni. A társulások egy $\mathcal{S} \subseteq 2^N$ rendszerét *kiegyensúlyozottnak* nevezzük, ha léteznek olyan $\lambda_S : S \Longrightarrow (0, 1]$ súlyok, melyekre $\sum_{i \in S \in \mathcal{S}} \lambda_S = 1$ teljesül minden i játékosra. Egy *játék kiegyensúlyozott*, ha minden kiegyensúlyozott társulás-rendszerre és kiegyensúlyozó súlyrendszerre fennáll a

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S v(S) \leq v(N)$$

egyenlőtlenség. A témakör talán leghíresebb állítása a következő tétel:

Tétel (Bondareva-Shapley) *Egy TU-játék magja akkor és csakis akkor nem üres, ha a játék kiegyensúlyozott.*

Minden elostással rendelkező játékra természetes módon definiálható egy speciális elosztás, a *nukleolusz*, amely mindig benne van a magban, ha az nem üres. Legyen egy adott x elosztásra és S társulásra $e(S, x) = v(S) - x(S)$ *többlet-függvény*, amely azt mutatja, hogy az S társulás mennyire elégedetlen az x elosztással. (Egy társulás pontosan akkor blokkoló, ha ez az érték pozitív.) Hasonlítsunk össze egy x és egy y elosztást a következőképpen: ha a fenti értékek közül a legnagyobb az x elosztás esetében nagyobb, mint az y elosztás esetében, akkor nevezzük y-t jobbnak. Amennyiben egyenlőség van a legnagyobb értékek között, akkor hasonlítsuk össze a második, harmadik ... legnagyobb értékeket, és az az elosztás nyerje meg az összehasonlítást, amelyiknél az első eltérő érték kisebb, mint a másiknál. Mivel az elosztások halmaza korlátos és zárt, továbbá a lexicografikus rendezésben szereplő többlet-függvények folytonosak, ezért az összehasonlítás szerint létezik pontosan egy olyan elosztás, amelyik minden más elosztásnál jobb, ezt nevezzük nukleolusznak.

Nyilvánvaló, hogy ha nem üres a mag, akkor létezik olyan elosztás, amelyre a legnagyobb érték nem pozitív, ezért a nukleolusznak sem lehet pozitív tagja, vagyis biztosan benne lesz a játék magjában.

Partícionálási TU-játék

A *partícionálási TU-játékokra* egy S társulás értéke megegyezik a benne szereplő játékosokból kialakított legnagyobb összértékű alaptársulásokból álló partíció értékével[49]:

$$v(S) = \max\{v(B_1) + v(B_2) + \cdots + v(B_k) : \pi \in \Pi_{\mathcal{B}}, B_i \in \pi\}$$

Itt is igaz, hogy egy x elosztás pontosan akkor mag-megoldás, ha nincs blokkoló alaptársulás (vagyis, ha $x(B) \geq v(B)$ minden $B \in \mathcal{B}$-re). Ez viszont azt jelenti, hogy ha π egy olyan partíciója N-nek, amelyre a maximum felvétetik, akkor minden $B_i \in \pi$-re $x(B_i) = v(B_i)$. Tehát, ha nem üres a magja a játéknak, akkor egy mag-beli x elosztás megvalósítható, úgy is hogy az $x(N)$ összértékű π partíció minden egyes B_i alaptársulásának tagjai egymást között – a társulásokon belül – osztják fel az általuk létrehozott hasznosságot.

Hasonlóképpen, meg lehet mutatni, hogy egy partícionálási játék kiegyensúlyozottságához elég csak az alaptársulásokból álló $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{B}$ kiegyensúlyozott társulás-rendszereket vizsgálni, hiszen minden $\mathcal{S} \subseteq 2^N$-re létezik egy $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{B}$, hogy

$$\sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S v(S) = \sum_{S \in \mathcal{S}} \lambda_S \left[\sum_{B_i \in \pi_S} v(B_i)\right] = \sum_{B_i \in \mathcal{S}'} \left[\sum_{\substack{B_i \in \pi_S \\ S \in \mathcal{S}}} \lambda_S\right] v(B_i) = \sum_{B_i \in \mathcal{S}'} \lambda'_{B_i} v(B_i)$$

ahol $\mathcal{S}'$ szintén kiegyensúlyozott a λ'_S súlyokra. A játék magja létezésének szükséges és elégséges feltétele tehát értelemszerűen egyszerűsödik.

A partícionálási TU-játék egy mag-beli elosztása a fentiek miatt kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy megoldásnak a stabil társulás probléma kifizetéses változatában. Ugyanis, ha $x(N)$ egy mag-elosztás az előbbiben, akkor az $x(N) = v(N)$

[49] Az egyes koalíciók értékének meghatározása exponenciális idejű számítást igényelhet.

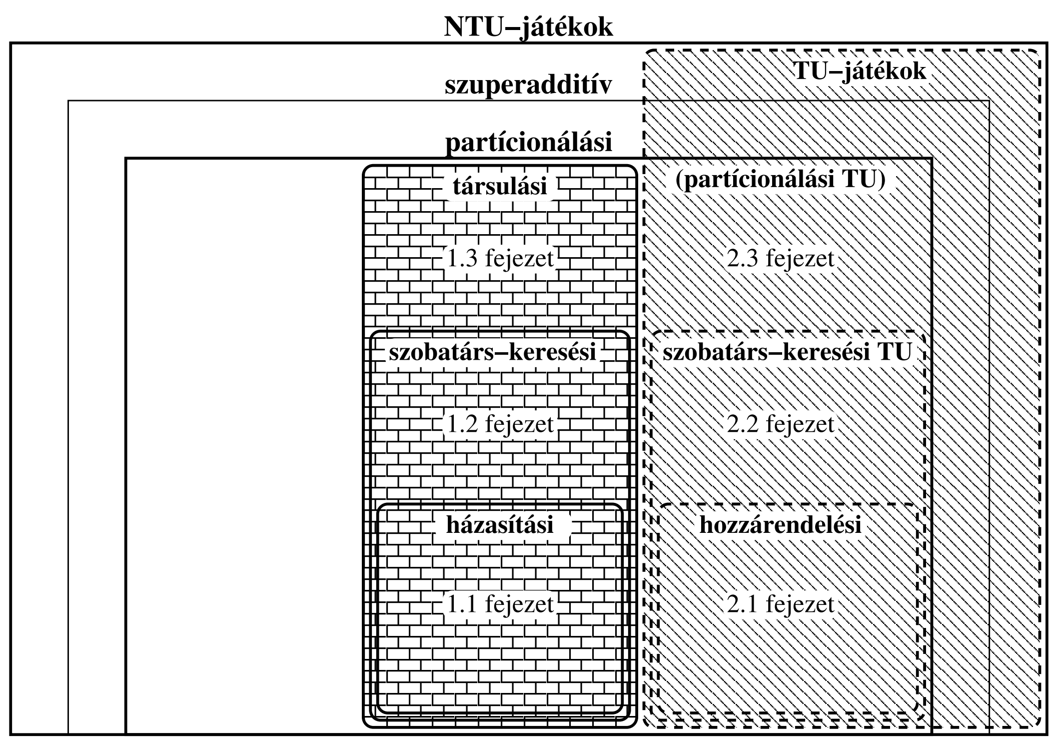
értéket megvalósító π partíció stabil partíció lesz $P_i = x_i - v(B_\pi[i])$ kifizetés mellett az utóbbiban.

A *szobatárs-keresési TU-játék* olyan partícionálási játék, amelyben az alaptársulások legfeljebb kétszemélyesek. Itt is a játék egy mag-beli elosztása kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy megoldásnak a stabil szobatárs probléma kifizetéses változatában.

Hozzárendelési játéknak pedig azt a változatot nevezzük, ahol a játékosok halmaza két részre osztható, és kétszemélyes alaptársulást csak két különböző részben lévő játékos alkothat. A játék egy mag-elosztása kölcsönösen egyértelműen megfeleltethető egy megoldásnak a stabil házasság probléma kifizetéses változatában.

Összefoglaló táblázat a kooperatív játékokról

A kooperatív játékok általunk ismertetett változatai tehát a következők (zárójelben a fejezetszám, ahol az írásban tárgyalásra kerül):



17. Ábra. A kooperatív játékok rendszerezése

Irodalom

Könyvek, folyóiratok, jegyzetek:

[1] Atila Abdulkadiroglu, Parag A. Pathak, Alvin E. Roth, The New York city high school match. *American Economic Review* (2005) **95(2), p:364-367**

[2] Atila Abdulkadiroglu, Parag A. Pathak, Alvin E. Roth, The Boston public school match. *American Economic Review* (2005) **95(2), p:368-371**

[3] David J. Abraham, Péter Biró, David F. Manlove, „Almost stable" matchings in the roommates problem. *Proceedings of WAOA 2005: the 3rd Workshop on Approximation and Online Algorithms, volume 3879 of Lecture Notes in Computer Science* (2006)

[4] Ron Aharoni, Tamás Fleiner, On a lemma of Scarf. *J. of Combinatorial Theory B* (2003) **87, p:72-80**

[5] Robert J. Aumann, Michael Mashler, Game theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud. *Journal of Economic Theory* (1985) **36, p:195-213**

[6] Mourad Baïou, Michel Balinski, The stable allocation (or ordinal transportation) problem. *École Politechnique, Cahier n^o 2001-003* (2001)

[7] Biró Péter, Stabil b-párosítás gráfokon. *Diplomamunka, BME matematikus szak* (2003)

[8] Péter Biró, Stable matching with incremental algorithm. *Proceedings of the 4th Japanese-Hungarian Symposium* (2005)

[9] Biró Péter, Katarína Cechlárová, Fleiner Tamás, On the dynamics of the stable matching markets. *Submitted to the 17th International Conference on Game Theory* (2006)

[10] Yosef Blum, Uriel G. Rothblum, „Timing is everything" and marital bliss. *Journal of Economic Theory* (2002) **103, p:429-443**

[11] Yosef Blum, Alvin E. Roth, Uriel G. Rothblum, Vacancy chains and equilibration in senior-level labor markets. *Journal of Economic Theory* (1997) **76, p:362-411**

[12] KATARÍNA CECHLÁROVÁ, SOŇA FERKOVÁ, The stable crews problem. *Discrete Applied Mathematics* (2004) **140, p:1-17**

[13] KATARÍNA CECHLÁROVÁ, TAMÁS FLEINER, On a generalization of the stable roommates problem. *ACM Trans. Algorithms* (2005) **1, p:1-12**

[14] KATARÍNA CECHLÁROVÁ, TAMÁS FLEINER, DAVID MANLOVE, The kidney exchange game. *Preprint* (2005)

[15] CHIKÁN ATTILA, A globalizáció és a gazdasági tevékenységek koordinációja. *Ezredforduló* (2001) **2001/1, p:24-28**

[16] CHIKÁN ATTILA, A gazdaság globalizációja és a civilizációk különbözősége. *Magyar Tudomány* (2002) **2002/6, p:730-736**

[17] CHIKÁN ATTILA, A Limai nyilatkozat a modern világ, a globalizáció és az integráció tükrében. *Nemzetközi pénzügyi ellenőrzés* (2003) **p:8-12**

[18] VINCENT P. CRAWFORD, ELSIE MARIE KNOER, Job matching with heterogenous firms and workers. *Econometrica* (1981) **49, p:437-450**

[19] DINKO DIMITROV, PETER BORM, RUUD HENDRICKX, SHAO CHIN SUNG, Simple priorities and core stability in hedonic games. *Preprint* (2004)

[20] EGERVÁRY JENŐ, Matrixok kombinatorius tulajdonságairól. *Matematikai és Fizikai Lapok* (1931) **38, p:16-28**

[21] KIMMO ERIKSSON, JOHAN KARLANDER, Stable matching in a common generalization of the marriage and assignment models. *Discrete Mathematics* (2000) **217, p:135-156**

[22] KIMMO ERIKSSON, JOHAN KARLANDER, Stable outcomes of the roommate game with transferable utility. *Int J Game Theory* (2001) **29, p:555-569**

[23] TAMÁS FLEINER, Stable and crossing structures. *Ph.D. Thesis* (2000) www.renyi.hu/fleiner

[24] FORGÓ FERENC, SZÉP JENŐ, SZIDAROVSZKY FERENC, Introduction to the Theory of Games. *Kluwer Academic Publishers: Nonconvex Optimalization and Its Applications* (1999) **32**

[25] FORGÓ FERENC, PINTÉR MIKLÓS, SIMONOVITS ANDRÁS, SOLYMOSI TAMÁS, Játékelmélet. *Elektronikus jegyzet, Budapesti Corvinus Egyetem* (2006)

[26] Satoru Fujishige, Akihisa Tamura, A general two-sided matching market with discrete concave utility functions. *Discrete Applied Mathematics* (2006) **154, p:950-970**

[27] D. Gale, L.S. Shapley, College admissions and the stability of marriage. *Amer. Math. Monthly* (1962) **69, p:9-15**

[28] D. Gusfield, R.W. Irving, The stable marriage problem: structure and algorithms. *The MIT press* (1990)

[29] Jana Hajduková, On coalition formation games. *Ph.D.Thesis* (2004)

[30] Dorothea Herreiner, Random matching and trade relationships in decentralised markets. *Ph.D. Thesis* (2000)

[31] Robert W. Irving, An efficient algorithm for the „stable roommates" problem. *Journal of Algorithms* (1985) **6, p:577-595**

[32] Robert W. Irving, Matching medical students to pairs of hospitals: A new variation on the well-known theme. *ESA1998, LNCS 1461* (1998)

[33] Robert W. Irving, David F. Manlove, The stable roommates problem with ties. *Journal of Algorithms* (2002) **43, p:85-105**

[34] Matthew O. Jackson, Alison Watts, The evolution of social and economic networks. *Journal of Economic Theory* (2002) **106, p:265-295**

[35] Jordán Tibor, Recski András, Szeszlér Dávid, Rendszeroptimalizálás. *TypoTeX Kiadó, Budapest* (2004)

[36] Marek M. Kaminski, Hydraulic rationing. *Mathematical Social Sciences* (2000) **40, p:131-155**

[37] Karády Viktor, A francia egyetem Napóleontól Vichyig. *Felsőoktatási Kutatóintézet Új Mandátum Könyvkiadó* (2005)

[38] Katona Y. Gyula, Recski András, Szabó Csaba, A számítástudomány alapjai. *TypoTEX Kiadó, Budapest* (2003)

[39] Alexander S. Kelso, Vincent P. Crawford, Job matching, coalition formation and gross substitues. *Econometrica* (1982) **6, p:1483-1504**

[40] Donald E. Knuth, Mariages stables. *Les Presses de l'Universite de Montreal* (1976)

[41] Kornai János, Bürokratikus és piaci koordináció. *Közgazdasági Szemle* (1983) **30(9), p:1025-1038**

[42] Kőnig Dénes, Graphok és matrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok* (1931) **38, p:116-119**

[43] Eija Kujansuu, Tuukka Lindberg, Erkki Mäkinen, The stable roommates problem and chess tournament pairings. *Divulgaciones Matematicás* (1999) **7, p:19-28**

[44] Lovász László, Michael D. Plummer, Matching Theory. *Akadémiai Kiadó - North Holland, Budapest* (1986)

[45] D. McVitie and L. B. Wilson, Stable marriage assignment for unequal sets. *BIT* (1970) **10, p:295-309**

[46] S. Mongell, Alvin E. Roth, Sorority rush as a two-sided matching mechanism. *American Economic Review* (1991) **81, p:441-464**

[47] Szilvia Pápai, Unique stability in simple coalition formation games. *Games and Economic Behaviour* (2004) **48, p:337-354**

[48] Boris G. Pittel, Robert W. Irving, An upper bound for the solvability probability of a random stable roommates instance. *Random Structures and Algorithms* (1994) **3, p:465-486**

[49] Alvin E. Roth, The evolution of the labor market for medical interns and residents: a case study in game theory. *Journal of Political Economy* (1984) **6, p:991-1016**

[50] Alvin E. Roth, Stability and polarization of interests in job matching. *Econometrica* (1984) **52, p:47-57**

[51] Alvin E. Roth, Conflict and coincidence of interests in job matching: some new results and open questions. *Mathematics of Operation Research* (1985) **10, p:379-389**

[52] Alvin E. Roth, The college admission problem is not equivalent to the marriage problem. *Journal of Economic Theory* (1985) **36, p:277-288**

[53] Alvin E. Roth, New physicians: a natural experiment in market organization. *Science* (1990) **250, p:1524-1528**

[54] Alvin E. Roth, A natural experiment in the organization of entry level labor markets: regional markets for new physicians and surgeons in the U.K. . *American Economic Review* (1991) **81, p:415-440**

[55] ALVIN E. ROTH, The NRMP as a labor market: understanding the current study of the match. *Journal of the American Medical Association* (1996) **13, p:1054-1056**

[56] ALVIN E. ROTH, The economist as an engineer: Game theory, experimentation and computation as tools for *Design Economics*. *Working Paper* (2001)

[57] ALVIN E. ROTH, ELLIOTT PERANSON, The redesign of the matching market for american physicians: some engineering aspects of economic design. *The American Economic Review* (1999) **89, p:748-752**

[58] ALVIN E. ROTH, MARILDA SOTOMAYOR, The college admissions problem revisited. *Econometrica* (1989) **57, p:**

[59] A. ROTH, M. SOTOMAYOR, Two-sided matching: A study in game-theoretic modeling and analysis. *Cambridge University Press* (1990)

[60] ALVIN E. ROTH, J.H. VANDE VATE, Random paths to stability in two-sided matching. *Econometrica* (1990) **58, p:1475-1480**

[61] ALVIN E. ROTH, XIAOLIN XING, Jumping the gun: imperfections and institutions related to the timing of market transactions. *American Economic Review* (1994) **84, p:992-1044**

[62] ALVIN E. ROTH, TAYFUN SÖNMEZ, UTKU ÜNVER, Kidney exchange. *Quartely J. of Econ.* (2004) **119(2), p:457-488**

[63] ALVIN E. ROTH, TAYFUN SÖNMEZ, UTKU ÜNVER, Pairwise kidney exchange. *J. Econ. Theory* (2005) **125(2), p:151-188**

[64] ALVIN E. ROTH, TAYFUN SÖNMEZ, UTKU ÜNVER, Efficient kidney exchange: Coincidence of wants in a structured market. *NBER Paper w11402* (2005)

[65] ALVIN E. ROTH, TAYFUN SÖNMEZ, UTKU ÜNVER, A kidney exchange clearinghouse in New England. *American Economic Review* (2005) **95(2), p:376-380**

[66] SUSAN SAIDMAN, ALVIN E. ROTH, TAYFUN SÖNMEZ, UTKU ÜNVER, FRANCIS L. DELMONICO, Increasing the opportunity of live kidney donation by matching for two and three way exchanges. *Transplantation* (2006) **81(5), p:773-782**

[67] HERBERT E. SCARF, The core of an n-person game. *Econometrica* (1967) **1, p:50-69**

[68] Herbert E. Scarf, The Computation of Economic Equilibria. *Cowles Foundation Monograph 24* (1973)

[69] Martin Shubik, Game Theory in the Social Sciences. *The MIT press* (1983)

[70] Martin Shubik, A Game-Theoretic Approach to Political Economy. *The MIT press* (1985)

[71] Solymosi Tamás, Kooperatív játékok és döntések. *Elektronikus jegyzet, Budapesti Corvinus Egyetem* (2004)

[72] Soros György, A globális kapitalizmus válsága. *Scolar Kiadó* (1999)

[73] Jimmy J. M. Tan, A necessary and sufficient condition for the existence of a complete stable matching. *Journal of Algorithms* (1991) **12, p:154-178**

[74] Jimmy J. M. Tan, Yuang-Cheh Hsueh, A generalisation of the stable matching problem. *Applied Mathematics* (1995) **59, p:87-102**

Napilapok, hetilapok:

[75] Antal László, Csillag István, Mihályi Péter, Magyarázzuk a globalizációt... *Népszabadság, 2000. augusztus 12.*

[76] Bedő Iván, Hálózati személyek. *HVG, 2006. április 7.*

[77] Ferge Zsuzsa, Az a fránya globalizáció... *Népszabadság, 2000. augusztus 18.*

[78] R. Hahn Veronika, Sir Elton John örök hűsége. *Népszabadság, 2005. december 17.*

[79] Hegyi Iván, Veszedelmes viszonyok. *Népszabadság, 2006. április 7.*

[80] Horváth Gábor, Donorklub segít a házastársaknak. *Népszabadság, 2006. február 25.*

[81] Pintér Zoltán, A piac fölfalja önmagát. *Népszabadság, 2004. május 18.*

[82] Poór Csaba, Egymásba akadva. *HVG, 2000 április 7.*

Internetes források:

[83] EUROPEAN ASSOCIATION OF INSTITUTIONS IN HIGHER EDUCATION
http://www.eurashe.be *2006.04.12.*

[84] EUROTRANSPLANT INTERNATIONAL FUNDATION
www.eurotransplant.nl *2006.04.12*

[85] FÉDÉRATION INTERNATIONALE DES ÉCHECS
www.fide.com *2006.04.12.*

[86] HOMEECHANGE.COM.
http://www.homeexchange.com *2006.04.03*

[87] JAPANESE RESIDENT MATCHING PROGRAM
www.jrmp.jp *2006.04.13*

[88] NATIONAL MATCHING SERVICES INC.
http://www.natmatch.com *2006.04.03*

[89] NATIONAL RESIDENT MATCHING PROGRAM
www.nrmp.org. *2004.04.03*

Szószedet

Magyar kifejezések	Angol kifejezések	Oldalszám
allokáció	allocation	30
átváltható hasznosság	transferable utility (TU)	96
gráf	graph	92
— páros ∽	— bipartite ∽	92
házasítási játék	marriage game	100
hipergráf	hypergraph	93
hozzárendelési játék	assignment game	101
karakterisztikus függvény	characteristic function	8
kiosztás	admission	26
kiválasztási függvény	choise function	38
— co-monoton ∽	— comonotone ∽	39
— behelyettesíthető ∽	— substitutable ∽	39
mag	core	96
mag-konfiguráció	core configuration	89
párosítás	matching	7
— *b*-∽	— *b*-∽	26
— fél-∽	— half-∽	16
párosítás-piac	matching market	50
— egyoldali ∽	— one-sided ∽	60
— kétoldali ∽	— two-sided ∽	50
partícionálási játék	partitioning game	100
stabil	stable	7
— ∽ házasság	— ∽ marriage	9
— ∽ párosítás	— ∽ matching	7
— ∽ partíció	— ∽ partition	7
— ∽ szobatárs	— ∽ roommate	15
— ∽ társulás	— ∽ coalition	18
— erősen-∽	— strongly-∽	37
— gyengén-∽	— weakly-∽	37
— szuper-∽	— super-∽	37
stratégia	strategy	13
— domináns ∽	— dominant ∽	13
— legjobb válasz ∽	— best replay ∽	13
szobatárs-keresési játék	roommates game	100
társulási játék	coalition formation game	100