Bevezetés a számításelméletbe II.
2004. ÁPRILIS 8-9.
9. gyakorlat: Számelmélet bevezető

1. Számítsuk ki az euklideszi algoritmus segítségével a következő számpárok legnagyobb közös osztóit! $(504, 372)$=? $(612, 834)$=?

   Adjuk meg a legkisebb közös többszörösöket is!

2. (a) Mennyi $(x^3 + 3x^2 + 5x + 3, x^2 + 2x + 2)$?

   (b) $(x^4 + x^2 + 1, x^4 + x^3 + x^2) = ?$

3. Legyen $a = 50700$ és $b = 111384$. Végezzük el a két szám prímtényezős felbontását, majd ezen kanonikus alakok segítségével számítsuk ki a legnagyobb közös osztót, a legkisebb közös többszöröst, és mondjuk meg azt is, hogy hány olyan szám van, amely osztója a és b közül legalább az egyiknek!

4. Legyen a és b két páratlan szám. Mennyi $(a^2 + b^2, 4)$?

5. Bizonyítsuk be, hogy a páratlan négyzetszámok nem csak néggyel, de nyolccal osztva is 1 maradékot adnak!

6. Melyek azok a p prímszámok, melyre

   (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím,

   (b) $p^2 + 2$ is prím,

   (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?

7. Bizonyítsd be, hogy a szomszédos *Fibonacci-számok* relatív prímek! De vajon mennyi a másodszomszédos Fibonacci-számok legnagyobb közös osztója?

8. **ZH!** Péter a XX. század második felében született, éppen nagyapja 53. születésnapján. Kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Hány éves Péter?

9. Lássuk be, hogy öt egymás után következő természetes szám szorzata mindig osztható 120-szal!

10. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes szám egyértelműen felírható $n = k^2q$ alakban, ahol k természetes, q pedig négyzetmentes szám.

11. Melyik az a legkisebb 3-mal nem osztható szám, melynek 15 osztója van?

12. Hány olyan háromjegyű szám van, melynek osztóinak száma osztható 11-gyel?