Bevezetés a számításelméletbe II.
MEGOLDÁSOK
8. gyakorlat: Összefüggőség

1. A gráfok pont- illetve élösszefüggőségi számai a következők:

   (a) 1,1 Mert összefüggő, de egy pont vagy egy él elvételével már két komponensre esik szét.

   (b) 2,3 Két pont elvételével már szétesik komponensekre, viszont tetszőlesen két pont között létezik legalább két pontdiszjunkt út, mert létezik Hamilton-kör a gráfban (a külső körív).
   Három él elvételével már izolálni lehet egy pontot, és tetszőleges két pont között létezik legalább 3 pontdiszjunkt út. Ebből kettő a külső köríven át vezet, és egy út a belső éleken keresztül is létezik minden pontból minden másik pontba.

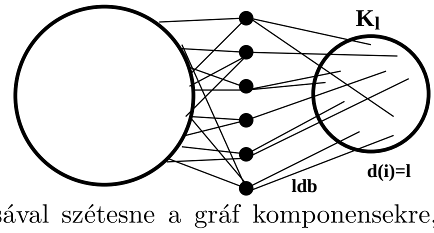
   (c) 3,3 A fokszám mindkét esetben felső korlátja az összefüggőségi számoknak. Két pont elvételével viszont a gráf még biztosan összefüggő marad (így két él elvételével is). Ugyanis, ha az elhagyott két pont külső (illetve a belső) körön volt, akkor a küllők által az összefüggőség triviálisan megmarad. Ha az egyik elhagyott pont a külső körben, a másik a belső körben volt, akkor a maradék két négy hosszú utat is biztosan összeköti legalább egy küllő-él, ezért a gráf összefüggő marad.

   (d) 4,4 A fokszám felső korlát. 4 db pontdiszjunkt út (és ezért eéldiszjunkt út is) pedig triviálisan létezik tetszőleges két pont között a négyzetrácson.

   (e) 2,2 Ez triviális.

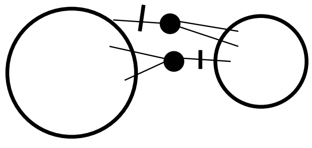
   (f) n, n A fokszám felső korlát mindkét paraméterre. n-nél kevesebb pont elvételével viszont a gráf még összefüggő marad, mindenképpen marad egy-egy pont mindkét halmazban, amiken keresztül az összefüggőség biztosított.

2. A kövezkező gráf k-szorosan pont-, illetve l-szeresen élösszefüggő:



3. Ha k él elhagyásával szétesne a gráf komponensekre, akkor ugyanezen élek tetszőleges végpontjait elhagyva is szétesne a gráf. A másik irányra ellenpélda az 1.feladat (b) része.

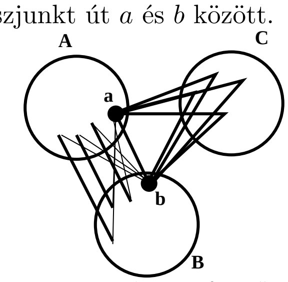
4. Két-reguláris gráf mindig diszjunkt körök uniója. Ha több kör van, akkor a gráf nem összefüggő, ha pedig csak egy n-hosszú kör, akkor 2,2 az összefüggőség.
   Ha minden pont foka három, akkor a pont- és élösszefüggőségi számok megegyeznek. Ugyanis ha az elhagyott pontok helyett mindig azt az élet hagyjuk el, amelyik egyedüliként köti össze az elhagyandó pontot egy keletkező komponenssel, akkor ugyanennyi él elhagyásával szintén megszűnik a gráf összefüggősége. (lásd ábra!)
   4-reguláris gráfokra az állítás már nem igaz. Az 1.feladat (b) gráfjának kibővítésével könnyen konstruálhatunk egy ellenpéldát.



5. A pontok minimális fokszáma mindig felső korlát az összefüggőségi számokra ezért, ha n-szeresen élösszefüggő egy gráf, akkor biztos, hogy minden pontjának foka legalább n. Ebből pedig a Dirac-tétel miatt következik a Hamilton kör létezése, ami viszont biztosítja a kétszeres összefüggőséget.

6. Azt kell megmutatnunk, hogy tetszőleges két pont között létezik két pontdiszjunkt út, amely ekvivalens azzal, hogy létezik egy, a két ponton átmenő kör. Válasszuk ki az egyik pontot, és egy élet, ami illeszkedik a másik pontra. Ezeken a feltevés szerint megy át kör, így a két ponton is megy át kör.

7. Két halmaz, vagyis 2r db pont elvételével a gráf izolált pontokra esik szét. 2r db pontdiszjunkt út viszont létezik tetszőlegesen kiválasztott két pont között. Ugyanis
-ha a két pont egy halmazban volt, akkor a többi halmaz-beli pontokon keresztül vezet a két pont között 2r db kettő hosszú pontdiszjunkt út.
-ha a két pont különböző komponensben volt, például $a \in A$ és $b \in B$, akkor C-n keresztül ismét vezet r db két hosszú pontdiszjunkt út. Az A és B halmaz között futó éleken keresztül pedig létezik újabb r db pontdiszjunkt út. Ezeket megkaphatjuk úgy, hogy keresünk egy teljes párosítást. A párosításban szereplő éleken át, három hosszú alternáló utakon így ismét létezni fog r db pontdiszjunkt út a és b között.



8. A legkisebb élszámú 4-szeresen élösszefüggő gráf 10 ponton az a 4-reguláris gráf, amelyet úgy kapunk, hogy egy 10 hosszú kör minden másodszomszédos pontját is összekötjük. Ez valóban 4-élösszefüggő, mert ha teszőleges két pontja között létezik 4 db éldiszjunkt út. Legyen például az egyik pont az 1. sorszámú a másik a k.
-ha k páratlan, akkor a külső körön két éldiszjunkt, a belső (páratlan sorszámú pontokat tartalmazó öt hosszú körörn) keresztül szintén két éldiszjunkt út vezet közöttük.
-ha k páros, akkor mindkét irányba az óra járása szerint létezik két-két darab éldiszjunkt út. Az egyik irányba például: $1, 2, 4, \ldots, k$ és $1, 3, \ldots, k-1, k$ utak éldiszjunktak.
Tehát a kezdeti 45 élből összesen 25 élet hagyhatunk el. Ennél többet azért nem, mert ekkor már lenne egy 4-nél kisebb fokszámú pontunk.

9. Ha G hatszorosan élösszefüggő, akkor minden pontjának foka legalább 6. Ekkor viszont egy, az élek számára vonatkozó tanult összefüggés miatt ellentmondásra jutunk: $3n \leq |E(G)| \leq 3n - 6$.

10. Az első állítás hamis a második igaz, mert:

    (a) Egy n-hosszú körre igaz, hogy teszőleges k pontján megy át kör, de az összefüggőségi száma csak 2.

    (b) Ha a két él: (a, b), illetve $c, d)$, akkor léteznie kell olyan pontnak (legyen ez a pont mondjuk a), amelyből nem vezet (a, b) éltől éldiszjunkt út a a másik él egyik végébe se. (Ha nem volna ilyen pont, akkor a két él benne lenne egy körben.) Ekkor (a, b) élet elhagyva már nem lesz több út a másik él végpontjaihoz, ezért a gráf összefüggősége egy él elhagyása után megszűnik.