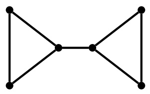
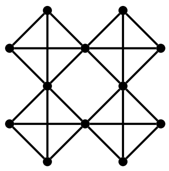
Bevezetés a számításelméletbe II.
2004. Április 1-2.
8. gyakorlat: Összefüggőség

1. Hányszorosan pont- illetve élösszefüggőek az alábbi gráfok:

   (a) 

   (b) 

   (c) Petersen-gráf
   (d) végtelen négyzetrács
   (e) n hosszú kör
   (f) **ZH!** $K_{n,n}$

2. Tetszőleges $k \leq l$ egész számokra konstruáljunk olyan gráfot, amely k-szorosan (pont)-összefüggő és l-szeresen élösszefüggő.

3. Mutassuk meg, hogy a k-szoros pontösszefüggésből következik a k-szoros élösszefüggés, de ugyanez visszafelé már nem teljesül!

4. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris gráf pont- és élösszefüggőségi száma megegyezik! (Mi van, ha a gráf 3- vagy 4-reguláris?)

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú G gráf n-szeresen élösszefüggő, akkor kétszeresen pontösszefüggő is!

6. **ZH!** A $G(V, E)$ összefüggő gráfban minden $v \in V$ ponthoz és $e \in E$ élhez van olyan kör, amely v-n is és e-n is átmegy. Mutassuk meg, hogy a G gráf kétszeresen összefüggő!

7. **ZH!** Legyenek A, B és C diszjunkt, r elemű halmazok. Készítsünk egy G gráfot úgy, hogy a csúcsainak halmaza legyen $A \cup B \cup C$ és két csúcsot akkor kössünk össze éllel, ha nem ugyanabba a halmazba esnek. Határozzuk meg azt a maximális k számot, amelyre a G gráf k-szorosan összefüggő.

8. **ZH!** Legfeljebb hány élet lehet elhagyni a 10 csúcsú teljes gráfból úgy, hogy a maradék gráf 4-szeresen élössszefüggő legyen?

9. **ZH!** Bizonyítsuk be, hogy ha G egy egyszerű síkgráf, akkor nem lehet hatszorosan pontösszefüggő!

10. Az alábbi állítások közül melyik hamis, illetve melyik igaz?

    (a) Ha egy gráfnak bármely k pontján át vezet kör, akkor a gráf k-szorosan összefüggő (Dirac tétel megfordítása).

    (b) Ha egy gráfnak van két olyan éle, amelyen át nem vezet kör, akkor a gráf legfeljebb egyszeresen élösszefüggő.