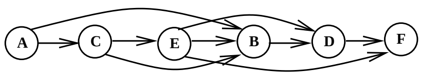
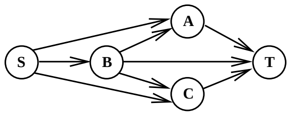
Bevezetés a számításelméletbe II.
Megoldások
6. gyakorlat: PERT-módszer, Turán-tétel

1. A feladatok topológikus rendezése a következő:

(a) 

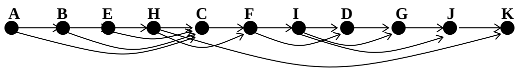
(b) 

A tevékenységek kezdési ideje, és a kritikus útak a következőképpen adódnak:

(a) A kezdési idők:
$S : 0; C : S + 2 = 2; E : C + 3 = 5;$
$B : max\{S + 8, \underline{C + 7}, E + 3\} = 9;$
$D : max\{E + 3, \underline{B + 3}\} = 12;$
$F : max\{E + 2, \underline{B + 8}\} = 20.$
A szükséges idő tehát 20, a kritikus út pedig: A,C,B,D,F

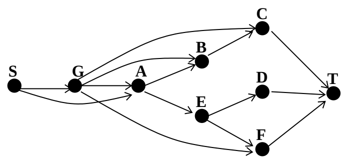
(b) A kezdési idők x függvényében:
$S : 0; B : S + 2 = 2;$
$A : max\{\underline{S + 5}, B + 2\} = 5;$
$C : max\{S + 6, B + x\} = max\{6, 2 + x\};$
$T : max\{A + 5, B + 7, C + 4\} = max\{10, 9, max\{10, 6 + x\}\}$
Ha tehát $x < 4$, akkor $T : 10$, és a kritikus utak: S,A,T; S,C,T.
Ha $x > 4$, akkor $T : 6 + x$, és a kritikus út: S,B,C,T.
Ha $x = 4$, akkor $T : 10$, és fenti kritikus utak itt is kritikusak lesznek.

2. A gráf topológikus rendezése a következő:



Ez alapján a következő kezdési idők adódnak:
$A : 0; B : A+1 = 1; E : B+2 = 3; H : E+1 = 4;$
$C : max\{\underline{H + 1}, E + 1, B + 2, A + 3\} = 5;$
$F : max\{\underline{C + 5}, H + 4\} = 10;$
$I : F + 5 = 15;$
$D : max\{\underline{I + 1}, F + 2, A + 1\} = 16;$
$G : max\{\underline{I + 4}, D + 1\} = 19;$
$J : max\{\underline{G + 2}, I + 5\} = 21;$
$K : max\{\underline{J + 1}, H + 1\} = 22$
Tehát a szükséges idő 22, a kritikus út pedig: A,B,E,H,C,F,I,G,J,K.

3. A topológikus rendezés:

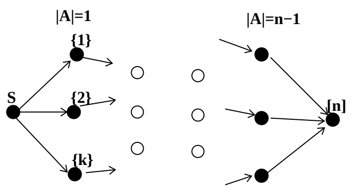


A kezdési idők a p függvényében a következők:
$S : 0;$
$G : S + 2 = 2;$
$A : max\{\underline{G + 1}, \underline{S + 3}\} = 3;$
$B : max\{\underline{G + 3}, A + 1\} = 5;$

$E = G + p = 2 + p;$
$C : max\{G + 6, \underline{B + 4}\} = 9;$
$D : max\{\underline{E + 3}, S + 2\} = p + 5;$
$F : max\{G + 4, E + 3\} = max\{6, p + 5\};$
$T : max\{C + 3, D + 4, F + 3\} = max\{12, 9+p, max\{9, p+8\}\} = max\{12, 9+p\}$

Ha tehát $p < 3$, akkor $T : 12$, a kritikus út pedig: S,G,B,C,T
Ha $p > 3$, akkor $T : 9 + p$, a kritikus út: S,G,E,D,T
Ha $p = 5$, akkor $T : 12$ és mindkét fenti út kritikus.

4. A topológikus rendezés a halmazok elemszáma szerint történik, tehát egy szintre az azonos elemszámú halmazok kerülnek:



A szimmetria miatt minden pont kezdési ideje egy szinten meg kell egyezzen, és könnyen belátható, hogy minden tevékenység kezdési idejét az őt megelőző szint pontjai befolyásolják. A kritikus utak ezért az n hosszú irányított utak lesznek, (melyek azon halmazsorozatoknak felelnek meg, ahol mindig eggyel növekszik a halmazok elemszáma). Így T : $1 + (1+2) + (2+3) + (3+4) + \cdots + (n-1)n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) - n = n(n+1) - n = n^2$

5. Az n csúcsú teljes gráf éleinek számának kétszerese$=2\binom{n}{2} = n(n-1)$. A legtöbb élet tartalmazó gráf, melyben nincs háromszög a Turán tétel alapján egy olyan teljes páros gráf, amelyben a két halmaz számosságának különbsége nem nagyobb 1-nél. Egy ilyen gráf vagy m^2, vagy $m(m-1)$ élet tartalmaz, ahol m a nagyobbik halmaz számossága. A fenti képlettel összehasonlítva láthatjuk, hogy a legkisebb pontszámú ilyen gráf $n = m$-re adódik, tehát egy olyan teljes páros gráfon lesz minimális a pontok száma, melynek pontszáma $m + (m-1) = 2m - 1$.

6. Minimális élszámú példa egy n csúcsú csillag. Ebben ugyanis még egy élet behúzva már kapunk háromszöget, ennél kisebb élszámú gráf viszont már nem is lenne összefüggő.

7. Ha úgy konstruálunk egy gráfot, hogy azokat a pontokat kötjük össze benne, akiknek megfeleltetett emberek leveleznek egymással, akkor a feladat szerint a gráf komplementerében nem lehet K_{10}, vagyis 10 olyan ember, akik közül nincs két egymással levelező. Ha a levelező párok minimumát keressük, akkor az megfelel a komplementer gráf maximális élszámának. Olyan gráfot keresünk tehát 90 pontra, amelyben nincs K_{10} és az élek száma maximális. A Turán-tétel alapján egy ilyet úgy kapunk, hogy a gráf pontjait 9 (megközelítőleg) egyenlő elemszámú halmazra bontjuk, és a halmazok között futó éleket húzzuk be. Jelen esetben 9 db 10 pontú halmazra oszthatjuk a gráf pontjait, és így az élek maximális száma: $|E(G)| = E(T_{90,2})| = \binom{90}{2} - 9\binom{10}{2} = 405$. Tehát a levelezésben álló párok száma legalább 405.