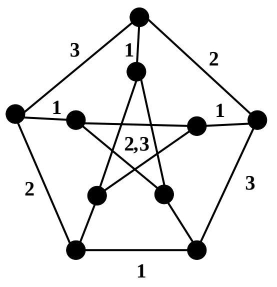
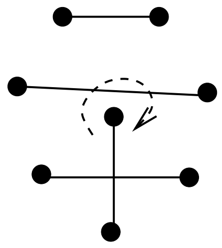
Bevezetés a számításelméletbe II.
Megoldások
5. gyakorlat: Élszínezés, perfekt gráfok

1. A Petersen-gráf élkromatikus számára nézve a Vizing-tétel alapján elmondhatjuk, hogy $3 = \Delta(G) \leq \chi_e(G) \leq \Delta(G) + 1 = 4$. Tehát, ha belátjuk, hogy 3 színnel nem lehet színezni az éleket, akkor adódik, hogy $\chi_e(G) = 4$. Indirekt módon tegyük fel, hogy mégis tudtunk 3 színnel színezni. Ekkor a külső 5-hosszú körön a 3 színből kettőt kétszer kell használnunk és a harmadik színt egyszer. Nevezzük el 1-esnek azt a színt, amivel csak 1 élet színeztünk ki a külső körön. Ekkor az éllel nem érintkező 3 küllő színe is 1-es kell legyen. Ez a három küllő viszont érintkezik a belső csillag mind az öt éléhez, vagyis a belső csillagban az 1-es színt már nem használhatjuk. Két színnel pedig nem tudunk kiszínezni egy 5-hosszú kört.



2. Belátjuk, hogy $\chi_e(G) = r + 1$, mert nem lehet kiszínezni a gráf éleit r db színnel. A pontok száma eredetileg páros volt, ezért $|V(G)| = 2n + 1$ páratlan lesz. A független élek maximális száma a gráfban $\nu(G) \leq n$ lehet, és mivel az egy színosztályba tartozó élek is függetlenek, ezért a színosztályok mérete is legfeljebb n. Mivel a színosztályokra bontás az élek egy partíciója, így az élek száma a színosztályok méreteinek összegével egyenlő: $n \cdot r + 1 = |E(G')| = |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_{\chi_e(G)}|$. A $|C_i| \leq n$ összefüggésből adódik, hogy az összeg legalább $r+1$ tagból áll, vagyis $\chi_e(G) \geq r+1$.

3. Először azt látjuk be, hogy $\chi_e(K_{2n}) = 2n - 1$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy egy bajnokságban, ahol páros darab csapat szerepel, tudunk olyan $2n - 1$ fordulós sorsolást készíteni, hogy mindegyik fordulóban játszon minden csapat, és végül mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszon. Egy ilyen sorsolást a legegyszerűbben a következő ábra segítségével adhatunk meg:



Vagyis egy $2n - 1$ csúcsú szabályos sokszög csúcsaiba és középpontjába helyezzük a pontjainkat. Vízszintesen párosítjuk a sokszög csúcsait, és az egy kimaradt pontot összehúzzuk a középső ponttal. Ezt a teljes párosítást ha elforgatjuk mindig eggyel, akkor $2n-1$ darab diszjunkt teljes párosítást kapunk.

A feladat megoldása innen már egyszerű. Ha egy teljes párosítást vettünk el a teljes gráfból (vagyis egy fordulót lejátszottunk a bajnokságban), akkor a maradék gráfban még $2n - 2$ diszjunkt teljes párosítást találhatunk, vagyis K_{2n} élhalmaza $2n - 2 = \Delta(G)$ színnel színezhető.

4. Az előző feladat pontosan azt mondja, hogy ha n páros, akkor $\omega(L(K_n)) = \Delta(K_n) = \chi_e(K_n) = \chi(L(K_n))$, tehát az alapgráfra teljesül az egyenlőség. Perfekt mégse lehet a gráf, ugyanis feszített részgráfként tartalmaz egy páratlan csúcsból álló teljes gráfot ($G' := K_{2n+1}$), erről pedig belátjuk, hogy $\chi_e(G') > \Delta(G') = 2k$. Ugyanis a független élek maximális száma $\nu(G') \leq k$ vagyis egy független élhalmazban, így egy színosztályban is legfeljebb k db él szerepelhet. Ezért, mivel a színezés egy partíciója az élhalmaznak adódik, hogy $\frac{(2k+1)2k}{2} = |E(G)| = |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_{\chi_e(G')}|$, ahol $|C_i| \leq k$. Ebből pedig következik, hogy a fenti összeg legalább $2k + 1$ tagú kell legyen (és ennyi szín elég is), vagyis $\chi_e(K_{2k+1}) = 2k + 1$.

5. Ha $\overline{G} = C_{2k+1}$, akkor $\alpha(\overline{G}) = \omega(G) = k$, mert egy független ponthalmazba nem kerülhetnek be a kör szomszédos pontjai. Viszont $\alpha(G) = 2$, mert csak két egymást követő körbeli pont lehet független a kör komplementerében. Ez azt eredményezi, hogy $|C_i| \leq 2$ minden színosztályra. Ekkor viszont a gráf pontjainak száma: $2k + 1 = |V(G)| = |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_{\chi(G)}|$ amiből adódik, hogy $\chi(G) \geq k + 1$. Ezért a gráf nem lehet perfekt.

6. Először is meg kell jegyeznünk, hogy minden részgráf is egy páros gráf komplementere, ezért az egyenlőséget csak egy ilyen G gráfra kell igazolni. Megmutatjuk, hogy ha $\nu(\overline{G})$ az eredeti páros gráfban a független élek maximális száma (vagyis egy maximális párosítás), akkor G-ben $\omega(G) = \chi(G) = |V(G)| - \nu(\overline{G})$. König és Gallai tételeiből ugyanis következik, hogy $\omega(G) = \alpha(\overline{G}) = |V(G)| - \nu(\overline{G})$. Ha pedig egy maximális teljes párosítás végpontjait azonosra színezzük G-ben, a többi pontot pedig különbözőre, akkor adtunk egy $|V(G)| - \nu(\overline{G})$ színt használó jó színezést, amiből már következik az egyenlőség.

7. Azt kell észrevenni, hogy egy ló a sakktáblán egy fehér mezőről csak egy fekete mezőre léphet.

   (a) Tehát $\chi(G) = 2$, a mezők jó színezése pedig az eredeti fekete-fehér színezés.

   (b) Tudjuk, hogy $\chi(G) = 2 \iff G$ páros, és minden páros gráf perfekt.

8. Ha megszámozzuk a színeket 1-től k-ig, akkor irányítsuk meg úgy az éleket a gráfban, hogy minden kisebb színű pontból a nagyobb színű pont felé mutasson az él. Ekkor a leghosszabb irányított út legfeljebb k hosszú, mert a színosztályokon belül nem mehetnek élek és ezért egy irányított úton haladva mindig legalább egy szín-indexet haladunk előre.

9. Ha egy összehasonlítási gráfnál elvégezzük a pontok előírt beszámozását, akkor

   (a) A szomszédos csúcsok mellé nem írthattuk ugyanazt a számot mert, ha mondjuk mindkettőjükhöz k-t írtunk volna, akkor mindkét pontból a belőle kiinduló leghosszabb irányított út k hosszú kellene legyen, de ekkor a kisebb pontból a nagyobb pontba menve, és innen az ő leghosszabb irányított útját használva a kisebb pontból találhatnánk egy $k+1$-hosszú irányított utat is. Észre kell venni, hogy ez a számozás egyben egy jó színezése is a gráfnak.

   (b) Az összehasonlítási gráf leghosszabb irányított láncában szereplő pontok adják a gráf maximális klikkjét. A számozás viszont biztosítja, hogy ezen lánc hosszánál nagyobb számot egyik pont mellé sem írtunk, vagyis a gráf kromatikus száma is pontosan ennyi. Minden ilyen gráfnak a feszített részgráfja is ugyanilyen tulajdonságú, ezért a gráf perfekt.

10. Két diszjunkt intervallumnak megfelelő pont közül legyen a nagyobb az, amelyik előlrébb szerepelt az egyenesen. Ezzel megadtuk az intervallum gráf komplementerében szereplő pontok egy részben rendezését, ami egy összehasonlítási gráfot jelent.