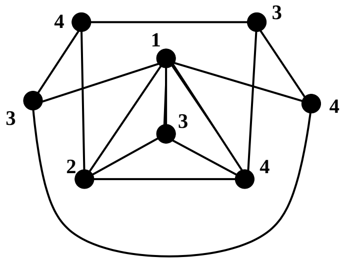
Bevezetés a számításelméletbe II.
MEGOLDÁSOK
4. gyakorlat: Színezések

1. A színezéshez 4 szín szükséges és elégséges is. Ugyanis van a gráfban egy teljes 4 pontú gráf, tehát a klikkszám, és így a kromatikus szám is legalább 4. Egy 4 színnel történő jó színezést pedig lehet találni:



Megjegyzés1: a fentieket tömören a $4 \leq \omega(G) \leq \chi(G) \leq |SZ_j| = 4$ egyenlőtlenséggel fejezhetjük ki, ahol $|SZ_j|$ egy jó színezés színszámát jelöli. A későbbiekben ezt a jelölést fogjuk használni.

Megjegyzés2: a gráfot le lehet rajzolni élkereszteződés nélkül is, tehát a gráf síkbarajzolható, így a 4-szín tétel alapján a kromatikus számra felső korlátként adódik a 4. (Ágyúval galambra).

2. Vegyük észre, hogy például a $v_1, v_2, \ldots, v_8$ pontok egy teljes 8-pontú részgráfot adnak. Már csak egy 8 színnel történő jó színezést kell találnunk. Színezzünk ki minden pontot azzal a számú színnel, ahány maradékot ad az indexe 8-cal osztva. (Tehát kiszínezzük az első 8 pontot 8 színnel majd a 9.-ket az 1. színével, a 10.-ket a 2. színével és így tovább...) Könnyű látni, hogy ez egy jó színezés.

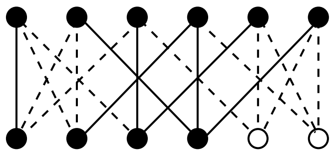
3. Megint találhatunk egy 8-pontú teljes gráfot, például a sakktábla egy sorának megfelelő pontokat. A 8 színnel történő jó színezésként pedig például úgy adhatjuk meg az i-edik sor j-edik sorában levő mező színét, hogy az legyen az $i + j$ nyolccal való osztásának maradéka. (Vagyis egy sort kiszínezünk 8 színnel, és mindig eggyel elcsúcstatva színezzük ki a többi sort.)

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

4. A kapott gráf páros, hiszen a páratlan pontok között és a páros pontok között sem megy él, hiszen ezek összege páros. Egy gráf viszont akkor és csak akkor páros, ha a kromatikus száma 2.

5. Azt kell tehát belátnunk, hogy G duálisa két színnel színezhető, vagyis a duális gráf páros pontosan akkor, ha az eredeti gráfban minden pont foka páros. Ezt viszont már beláttuk a 2. gyakorlat 2. feladatában oda-vissza. Ha egy síkgráf tartományait két színnel tudjuk színezni, akkor minden pont fokszáma páros kell legyen és fordítva.

6. Bővítsük ki a gráfot élekkel úgy, hogy minden pont fokszáma $\Delta(G)$ legyen! (Ha nem volt egyenlő a két halmaz elemszáma, akkor vegyünk fel további pontokat is, úgy hogy egyenlő legyen!) Ebben az $\Delta(G)$-reguláris páros gráfban a 2. gyakorlat 10. feladata szerint az élek kiszínezhetőek $\Delta(G)$ színnel úgy, hogy mindegyik színosztályhoz tartozó élek egy teljes párosítást adjanak a gráfban. Könnyű meggondolni, hogy ez a színezés jó lesz az eredeti gráfban is. (Ennél kevesebb színnel természetesen nem lehet színezni.)



Δ(G)

7. Azt kell észrevenni, hogy F-ben a két részgráf pontjai nem kaphatnak azonos színt, mert minden G-beli pont össze van kötve minden H-beli ponttal. Ezért $\chi(G)+\chi(H)$-nél kevesebb szín nem lehet elég a színezésre, mert ellenkező esetben valamelyik részt ki tudnánk színezni a kromatikus számánál kevesebb színnel is. Ennyi szín viszont elég, hiszen az eredeti színezések (ha különbözőre számozzuk a két részgráf színosztályait), akkor egy jó színezést adnak.

8. Ez az egyenlőtlenség azért teljesül, mert a minimális lefogó pontok halmazát pontonként vehetjük egy-egy színosztálynak, a többi pont pedig, mivel független (közöttük nem futhat él, hiszen akkor ez nem lenne lefogva), szintén egy színosztályt alkothat.
A legegyszerűbb példa, ahol az egyenlőség teljesül a teljes gráf (lásd a 3. gyakorlat 7. feladatát!)

9. Legyenek $C_1, C_2, \ldots, C_{\chi(G)}$ a gráf egyik legjobb színezésével kapott színosztályok. Ekkor nyilvánvaló, hogy $|C_i| \leq \alpha(G)$, mivel minden színosztály független pontokból áll, és mivel a színezés a gráf ponthalmazának egy partíciója, ezért: $|V(G)| = |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_{\chi(G)}| \leq \alpha(G) \cdot \chi(G)$ adódik.

10. Az állítás az előző feladat eredményéből és a $\chi(\overline{G}) \geq \omega(\overline{G}) = \alpha(G)$ ismert összefüggésből adódik.

11. Bontsuk fel ismét G pontjainak halmazát színosztályokra a legjobb színezés szerint! Ekkor két színosztály között legalább egy élnek futnia kell, mert ellenkező esetben a két színosztály pontjai függetlenek lennének, és összevonhatnánk őket egy színosztályba. Ha viszont minden színosztály között megy legalább egy él, akkor ez $\chi(G)$ db színosztályra legalább $\binom{\chi(G)}{2}$ élet jelent.