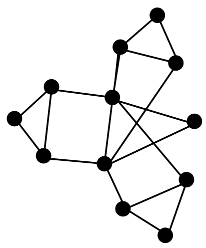
Bevezetés a számításelméletbe II.

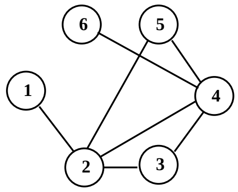
2004. FEBRUÁR 26-27.

3. gyakorlat: Független és lefogó pontok, élek

1. Van-e teljes párosítás az alábbi gráfban?



2. Hat ember jár egy teniszklubba, de vannak, akik nem szívesen játszanak együtt. A lenti gráf mutatja azt, hogy ki-kivel játszik szívesen együtt.



Adjunk választ a következő kérdésekre:

(a) Egy nap mindenki eljött a klubba. Legalább hány mérkőzést kellett összesen lejátszaniuk ahhoz, hogy mindegyik játékos elmondhassa, hogy teniszezett aznap.

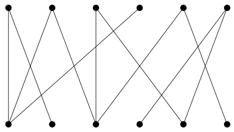
(b) Másnap is eljött mindenki, de olyan fáradtak voltak, hogy mindenki legfeljebb egyszer akart játszani. Legfeljebb hány meccs lehetett azon a napon?

(c) A következő napon nem jött el pár ember, és senki sem talált magának megfelelő partnert. Legalább hány ember hiányzott?

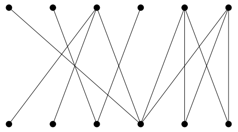
(d) Az utolsó napon megint nem sikerült egy párt sem összehozniuk, és ezért bánatukban feloszlatták az egész klubbot. Legfeljebb hány ember lehetett ebben az utolsó összejövő társaságban?

3. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!

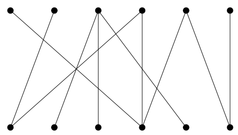
(a)



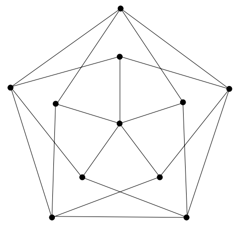
(b)



(c)



(d)



4. Határozzuk meg az alábbi gráfokra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit?

(a) $K_{3,3}$,

(b) K_5

(c) $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$ és $(v_i, v_j) \in E(G)$, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad.

(d) Petersen-gráf

5. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i+j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$ – független pontok maximális, $\nu(H)$ – független élek maximális, $\rho(H)$ – a lefogó élek minimális, $\tau(H)$ – lefogó pontok minimális számát!

6. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n-1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?

7. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$

8. Igazoljuk, hogy minden egyszerű G gráfban $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ és létezik olyan gráf is, melyre az egyenlőség teljesül.

9. Bizonyítsuk be, hogy egy teljes páros gráfban $\alpha(G) \cdot \tau(G) = |E(G)|$!

10. Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.

11. Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét. Mutassuk meg, hogy: $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$

12. Legyen G egy 100 csúcsú síkgráf komplementere. Legalább mennyi lesz $\tau(G)$?