**Bevezetés a számításelméletbe II.**

MEGOLDÁSOK

*2. gyakorlat: Páros gráfok, párosítások*

1. A kapott gráf pontjainak száma $2^n$. Mindhárom kérdésre a válasz igenlő.

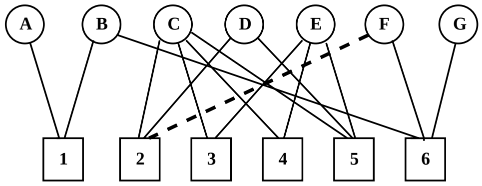
   (a) Létezik benne Hamilton kör. Lássuk be ezt teljes indukcióval! $n = 2$-re (egy négyzetben) egyszerűen találhatunk Hamilton-kört. Tegyük fel, hogy $n$-re is igaz az állítás, tehát találhatunk benne egy $a_1, a_2, \dots, a_{2^n}, a_1$ Hamilton-kört, és lássuk be, hogy $n + 1$-re is található benne. Osszuk két felé az $n + 1$-hosszú bitsorozatokat aszerint, hogy 0-val, vagy 1-el kezdődnek (jelöljük a 0-val kezdődő, $a$-sorozattal folytatódó bitsorozatot $0a$-val). Mindkét részben megtalálható az előbb felsorolt Hamilton-kör, az egyikben minden kód 0-val, a másikban 1-el kezdődik. A két $2^n$-pontú Hamilton-kört pedig egyszerűen összeköthetjük egy $2^{n+1}$-pontú körré a következő képpen: $0a_1, 0a_2, \dots, 0a_{2^n}, 1a_{2^n}, \dots, 1a_2, 1a_1, 0a_1$.

   (b) A gráfban minden pont foka $n$, ugyanis $n$ helyen tudunk bitet váltani, tehát $n$ lesz azon bitsorozatok száma, amelyek csak 1 bitben különböznek egy adott kódszótól, vagyis minden pontnak pontosan ennyi szomszédja lesz a gráfban. Ha tehát $n$ páros, akkor létezik Euler-kör a gráfban, ha páratlan, akkor nem létezik.

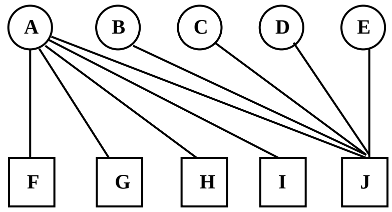
   (c) A gráf páros. Bontsuk két részre a pontok halmazát aszerint, hogy a nekik megfelelő kódszavakban az 1-esek száma páros vagy páratlan (tehát a bitsorozatok paritása szerint). Az így kapott két halmazon belül nem mehetnek élek, hiszen 1 bit megváltoztatásával a kód paritása is biztosan megváltozik, tehát élek csak a két halmaz között futhatnak, vagyis a gráf páros.

2. Az 1. feladatsor 4. példáját felhasználva adódik: $G$-nek van Euler-köre $\Longleftrightarrow$ $G$-ben minden vágás páros sok élet tartalmaz $\Longleftrightarrow$ $G^*$-ban minden kör páros hosszú $\Longleftrightarrow$ $G^*$ páros gráf.

3. Az első esetben nem létezhet olyan párosítás, amivel mind a 6 hely betölthető lenne, mert a $\{2, 3, 4, 5\}$ munkákhoz csak 3db jelentkező van, tehát sérül a Hall-feltétel. Öt álláshely viszont betölthetö. Ha Feri mégis elvállalja a 2. munkát, akkor változik a helyzet, és található minden munkához jó párosítás, például: A-1, F-2, C-3, E-4, D-5, G-6.



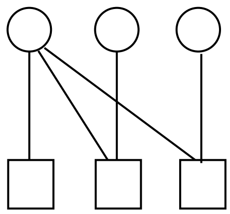

4. Balázs Csaba, Dani és Elemér csak Jutkával hajlandó játszani, ezért négyük közül legfeljebb csak egyikük szerepelhet vegyes párosban, így legfeljebb csak két párt tud kiállítani az osztály. (Például: Andris Flórával, Elemér Jutkával játszik egy párban.)




5. Mivel egy fa nem tartalmaz kört, így páratlan hosszú kört sem tartalmaz, ezért a tétel alapján biztosan páros. Adjunk is meg egy lehetséges partíciót: vegyük a fa egy tetszőleges pontját, és minden pontra írjuk rá, hogy hány lépésben érhető el a kiválasztott pontból. Ha páros sok lépésben, akkor a kiválasztott ponttal együtt kerüljenek az $A$ halmazba, ha páratlan lépésben, akkor a $B$ halmazba. Világos, hogy élek csak a két ponthalmaz között futnak.
   A teljes párosítás egyértelműsége abból következik, hogy a fában mindig létezik elsőfokú pont, amely csak a szomszédjával lehet párban, és ha elhagyjuk ezt a pontpárat, akkor a kapott fában (vagy erdőben) szintén lesz elsőfokú pont, amelynek a párja megint csak a szomszédja lehet. Ezzel a gondolatmenettel leépíthetjük a fát egyértelműen egy teljes párosításra, ha létezett benne.

6. Az első fontos megfigyelésünk, hogy a pontok foka $1 \le d(i) \le n$ lehet, mert a gráf összefüggő és páros. Ebből következik, hogy az $A$ ponthalmazban, amelyben minden pont foka különbözik, szükségszerűen előfordul az összes fokszám 1 és $n$ között. Lássuk be, hogy teljesül a Hall-feltétel minden $X \subseteq A$-ra, vagyis $|X| \le |N(X)|$, (ahol $|N(X)|$ az $X$ halmaz szomszédainak elemszámát jelöli). Legyen $j$ a legnagyobb fokszámú pont egy tetszőleges $X \subseteq A$ halmazban, melynek elemszáma $k$. Ekkor egyszerűen adódik, hogy $|X| = k \le j \le |N(X)|$, hiszen, ha létezik egy $j$ fokszámú pont $X$-ben, akkor a $X$ szomszédossági halmaza is legalább $j$ db pontból áll.

7. Lássuk be ezt egy páros pontszámú egyszerű gráfra! (Tehát nem szükséges, hogy páros legyen a gráf. Viszont egy páros gráfban a Hamilton-kör is csak páros hosszú lehet.) Ha létezik Hamilton-kör a gráfban, akkor minden második élét véve találhatunk egy teljes párosítást is a gráfban.
   Megfordítva az állítás nem igaz, erre egy ellenpélda:

8. Ha egy $2n$ pontú gráfban a minimális fokszám legalább $n$, akkor teljesül a Dirac-feltétel, ezért létezik Hamilton-kör a gráfban, így találhatunk teljes párosítást is benne.

9. Mutassuk meg, hogy egy $r$-reguláris páros gráfban minden $X$ halmazra teljesül a Hall-feltétel. Ha ezt belátjuk, akkor a Frobénius-tétel miatt létezik teljes párosítás a gráfban, mert a két halmaz elemszáma triviálisan megegyezik. Vegyünk egy tetszőleges $X$ halmazt, legyen ennek elemszáma $k$. Az $X$ halmaz szomszédainak, $N(X)$-nek az elemszáma pedig $l$. Ekkor, mivel minden pont foka $r$, adódik, hogy:
   $k \cdot r = X$-ből kimenő élek száma $\leq N(X)$-be bemenő élek száma $= l \cdot r$
   Melyből adódik a $k \leq l$ egyenlőtlenség, tehát teljesül a Hall-feltétel.

10. Az előző feladatból megtudtuk, hogy minden $r$-reguláris páros gráfban található egy teljes párosítást. Színezzük ezt ki 1-es számú színnel, majd hagyjuk el a gráfból. A maradék gráf $(r-1)$-reguláris lesz, mert minden pont foka pontosan 1-el csökkent. Ebben is találhatunk tehát egy teljes párosítást, amit színezzük ki a 2-es számú színnel. Így folytatva az algoritmust, az összes élet ki tudjuk színezni $r$ db színnel úgy, hogy minden színosztály pont egy teljes párosítást adjon.

11. Rendeljük azt a $2n$ csúcsú páros gráfot a mátrixhoz, melynek csúcsai a mátrix sorai, illetve oszlopai, és két pont között pontosan akkor fusson él, ha megfelelő sor és oszlop metszetében 1-es található. Így minden pont foka a gráfban pontosan $k$ lesz, tehát a 9. feladat nyomán ebben is találhatunk egy teljes párosítást, ami viszont a mátrixra nézve azt jelenti, hogy találtunk $n$ db 1-es úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban pontosan egy 1-es szerepeljen.

12. Belátjuk, hogy minden pont foka legalább 98. Ha ugyanis egy tetszőleges $v$ pontra lenne két olyan pont is, amellyel nincs összekötve, akkor ezt a három pontot nézve nem teljesülne a feladat feltétele. Ha viszont minden pont foka legalább 98, akkor bőven teljesül a Dirac feltétel, tehát találhatunk egy Hamilton-kört a gráfban, és mivel a gráf páros pontszámú, ezért a Haminton-kör minden második élét véve találtunk egy teljes párosítást is.

13. Megmutatjuk, hogy teljesül a Hall-feltétel minden $X$ lány-halmazra. Ha $X$ elemszáma kisebb, vagy egyenlő, mint 13, akkor triviálisan több lesz az $N(X)$ elemszáma 13-nál, hiszen már egy lány is legalább 13 fiút ismer. Ha viszont az $X$ elemszáma legalább 13, akkor ők már az összes fiút ismerni fogják, mert ha nem így lenne, akkor találnánk egy olyan fiút, aki nincs ismerettségben az $X$ halmazzal, így legfeljebb csak 12 lányt ismerhet, hiszen a lányok száma 25 volt.

14. Megmutatjuk, hogy akkor és csakis akkor találhatunk minden férfinak két neki tetsző háremhölgyet, ha teljesül, hogy bármilyen $X$ fiú halmaznak tetsző hölgyek száma, $|N(X)| \geq 2|X|$. Visszavezetjük a feladatot a Hall-feltételre. Legyen minden férfinak egy ikertestvére, akiknek pontosan ugyanazok a lányok tetszenek. (Vagyis a gráfban minden férfi-pontot duplázzunk meg, és kössük össze ugyanazokkal a pontokkal, mint amikkel az eredeti pont össze volt kötve.) Az új feladatban pontosan akkor tudunk találni egy olyan párosítást, amiben minden férfinek jut neki tetsző háremhölgy, ha az eredeti feladatban minden férfi kettőt is tud találni.